Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

APPUNTI DI ALGEBRA DELLA LOGICA

Roberto Magari

Premessa

Quanto segue è lo schema seguito nel tenere tre lezioni introduttive all'algebra della logica. Gli organizzatori del convegno in cui le lezioni sono state tenute mi hanno poi chiesto di ampliare gli appunti ma, dopo aver introdotto pochi chiarimenti, mi è sembrato che lo schema fosse più efficace di una stesura diluita e in regola col normale stile matematico.

Lo schema può essere preso come base per un corso di secondo biennio, estendendo questa o quella parte e può risultare utile anche a chi non intenda specializzarsi in logica.

Trattandosi di appunti introduttivi non mi sono preso la briga di attribuire con cura i vari risultati. In un primo tempo credevo che la trovatina di ricondurre l'ordinaria dualità per emimorfismi booleani a una connessione di Galois e di estenderla ai "quasiemimorfismi" fosse mia ma un amico più di me attento alla bibliografia mi ha segnalato un lavoro di

Schmidt del 1972 (*Boolean duality extended*, in *Theory of sets and topology*) in cui è sviluppata la medesima osservazione o pressappoco. Ritengo comunque che sfruttando la cosa si possa trovare qualcosa di nuovo in algebra della logica.

Alla vasta teoria delle algebre cilindriche e delle algebre poliadiche ho dedicato solo un accenno, ciò non significa che non la ritenga importante.

Ho ricondotto quasi tutto alla dualità per (quasi) emimorfismi che è l'analogo algebrico-topologico delle considerazioni "semantiche" che talvolta anzi ne sono una variazione enfatizzata.

R. Magari

I Richiami elementari

teorema di Stone. Ogni algebra di Boole è isomorfa a un opportuno "campo di insiemi".

più raffinato. Ogni algebra di Boole è isomorfa all'algebra dei "clopen" di un opportuno spazio top. compatto e totalmente sconnesso (si dicono spazi di Stone) e di uno solo a meno di omeomorfismi.

uso comodo. "Pensare" ogni algebra di Boole come algebra dei clopen di uno spazio di Stone.

versione categoriale. Quello sottinteso nel teorema di Stone è un funtore controvariante fra la categoria delle alg. di Boole con gli om. algebrici e la categoria degli spazi di Stone con le funz. continue.

versione alg. universale. Le algebre di Boole essendo quelle della varietà generata da $\underset{\sim}{2}$ (= $\langle 2, +, \cdot, \nu, 0,1 \rangle$) per il teorema di P. Hall ognuna di esse è immagine omomorfa di una potenza sottodiretta di $\underset{\sim}{2}$. Il teorema di Stone assicura la "categoricità" di $\underset{\sim}{2}$, ossia che ogni algebra di Boole è isomorfa a una potenza sottodi-

retta di $\underset{\sim}{2}$.

notizia. Il tutto è imitabile partendo da $\underset{\sim}{n}$ per $n \in \omega$, altrimenti no.

adiacenze. 1. vedere le algebre di Boole come "algebre" nel senso dei commutativi (spazi vett. con ulteriori op.) allora la dualità....

2. C'è un teorema di Stone per i ret. distr. (prendere filtri o ideali primi).

interesse logico. Algebre di Lindenbaum.

motivi per considerare algebre di Boole con ulteriori operazioni. Soprattutto le alg. di Lindenbaum quando si vogliono trasportare al quoziente altre operazioni (derivanti per esempio da quantificazioni, operatori modali, speciali predicati). Un altro caso si presenta quando, non avendo il calcolo "abbastanza" connettivi o non avendo "abbastanza" assiomi non si ottengono al quoziente algebre di Boole ma algebre più povere ognuna delle quali però può essere immersa in una opportuna algebra di Boole; meglio se accade che l'algebra venga ad essere quella dei chiusi o degli interni o simili in un opportuno operatore.

Richiami sulle connessioni di Galois

Siano A, B due insiemi e $\lambda \subseteq A \times B$. Poniamo, per $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$;

$\lambda X = \{y \in B : \text{per ogni } x \in X \text{ è } x \lambda y\}$

$\curlywedge Y = \{x \in A : \text{per ogni } y \in Y \text{ è } x \lambda y\}$

e ancora $K = \curlywedge\lambda$, $\curlywedge = \lambda\curlywedge$

Si ha:

(1) $\lambda\curlywedge\lambda = \lambda$, $\curlywedge\lambda\curlywedge = \curlywedge$

donde:

(2) $KK = K$, $\curlywedge\curlywedge = \curlywedge$

(3) se $X \subseteq Y$ allora $\lambda X \supseteq \lambda Y$ e analog. per $\curlywedge$

donde:

(4) se $X \subseteq Y$ allora $KX \subseteq KY$ " " " $\curlywedge$

Si ha:

(5) $\lambda(X \cup Y) = \lambda X \cup \lambda Y$ " " " $\curlywedge$

(6) $\lambda(X \cap Y) \supseteq \lambda X \cup \lambda Y$ " " " $\curlywedge$

Così K e $\curlywedge$ risultano operatori di Moore, $\curlywedge$ e λ ristretti ai chiusi danno due antiisomorfismi inversi l'uno dell'altro.

Esempi:

- La relazione binaria che lega un'espressione e una struttura se la seconda è modello della prima. (ordinaria teoria dei modelli).

- la relazione che lega un polinomio a un punto se il polinomio si annulla nel punto.. (algebra commutativa e geometria algebrica).
- la relazione che lega un automorfismo α di un campo e un elemento a del campo se $\alpha a = a$. (caso della classica teoria di Galois):
- nota bene: con un po' di fantasia si possono far rientrare i vari casi nel primo.

nozione da ricordare: operatori di Moore algebrici (connessi con la compattezza).

esercizio: dato un operatore di Moore immergerlo nella situazione di cui sopra.

Nel caso di algebre di Boole spazio duale si può considerare la relazione che lega p,x se $p \in x$ (leggendo gli elementi dello spazio come ultrafiltri) ossia $x \in p$ (leggendo gli elementi dell'algebra come clopen) ossia $px = 1$ (leggendo gli elementi dell'algebra come funzioni continue dallo spazio considerato allo spazio 2 (con la top. discreta) o invece gli elementi dello spazio come omomorfismi dell'algebra considerata a $\underset{\sim}{2}$. I chiusi in K sono allora i filtri, mentre λ rende l'ordinaria topologia.

Tornando al caso generale ricordiamo condizioni caratteristiche affinchè λ sia topologico.

$\lambda 0 = 0$ sse A non è <u>monogeno</u>

(Un chiuso $X \subseteq A$ si dice "monogeno" sse esiste un $x \in B$ con $\Lambda\{x\} = X$)

(commento: significato logico di "monogeno").

<u>Lemma</u> λ è additivo sse comunque presi due chiusi X,Y in K si ha:

$\lambda(X \cap Y) = \lambda X \cup \lambda Y$ (ossia $\subseteq$).

<u>Teorema</u> λ è additivo sse i chiusi monogeni di $\langle A,K \rangle$ sono primi.

(un chiuso X si dice primo sse per ogni coppia di chiusi Y,Z con $X \supseteq Y \cap Z$ vale una delle $X \supseteq Y$, $X \supseteq Z$; si dice massimale se $X \subset A$ e non esiste alcun chiuso Y con $X \subset Y \subset A$)

<u>Dim</u> Suff. sia $z \in \lambda(X \cap Y)$ ossia $\{z\} \subseteq \lambda(X \cap Y)$ onde $Z = \Lambda\{z\} \supseteq \Lambda\lambda(X \cap Y) = X \cap Y$

Ma Z è monogeno onde sarà, diciamo, $Z \supseteq X$, $\lambda Z \subseteq \lambda X$, $z \in \lambda X$. Nec. sia $z \in B$, $\Lambda\{z\} = Z$, $Z \supseteq X \cap Y$ allora $\lambda Z \subseteq \lambda(X \cap Y)$ onde $z \in \lambda(X \cap Y)$ quindi $z \in \lambda X \cup \lambda Y$ diciamo $z \in \lambda X$ cioè $\{z\} \subseteq \lambda X$ e $Z \supseteq KX = X$

<u>Corollario</u> λ è top. sse i monogeni di $\langle A,K \rangle$

sono primi e diversi da A.

II Dualità di Jonsson-Tarki-Halmos generalizzata.

situazione $\begin{matrix} A & B \\ S & T \end{matrix}$ con S,T spazi di Stone, A, B rispettive algebre dei clopen.

definiamo una relazione binaria λ fra AxB e TxS ponendo:

$(p,q)\,\lambda\,(y,x)$ sse da $x \in p$ segue $y \in q$.

<u>lemma</u> 1. <u>Comunque presa $R \subseteq TxS$ la R associa ad ogni $p \in A$ tutti i q di un certo filtro $(\lambda R)p$. Inoltre $(\lambda R)0$ è il filtro improprio e $(\lambda R)(p+q) = (\lambda R)p \cap (\lambda R)q$.</u>

Ovviamente si ottiene una biiezione g dall'insieme delle $X \subseteq AxB$ soddisfacenti tali condizioni all'insieme delle $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(T)$ che conservano la somma, portano gli elementi di A in chiusi e 0 in $\emptyset$ (le chiameremo quasiemimorfismi), ponendo: $(gX)p = \bigcap\{q: (p,q) \in X\}$

Scriveremo $\bar{\lambda}$ per $g \circ \lambda$, $\bar{X}$ per $\lambda \circ g^{-1}$ e $\bar{R}$ per $g \circ R \circ g^{-1}$.

<u>lemma</u> 2. <u>Comunque preso $X \subseteq AxB$ la controimmagine di un $p \in A$ mediante la λX è un chiuso.</u>

dim. ricordando quanto detto prima e la $\lambda\lambda\lambda = \lambda$.

<u>lemma</u> 3. <u>Comunque preso $X \subseteq AxB$ l'immagine di un $x \in T$ in λX è un chiuso.</u>

dim. Si ha per $y \in T$:

$\nu(\lambda X)(y) = \nu\{x \in S$: per ogni $(p,q) \in X$ da $x \in p$ segue $y \in q$ $=$

$= \{x \in S$: esiste un $(p,q) \in X$ con $x \in p$ e $y \notin q\} =$

$= \bigcup\{p$: esiste un q con $(p,q) \in X$ e $y \notin q\}$.

Quest'ultimo insieme è un aperto onde $(\lambda X)(y)$ è un chiuso.

<u>definizione</u> Le $R \subseteq T \times S$ soddisfacenti le condizioni trovate, ossia:

(i) Per ogni $p \in A$, $R^{-1}(p)$ è un chiuso (di T).

(ii) Per ogni $y \in T$, $R(y)$ è un chiuso (di S),

si diranno "quasibooleane".

Si ha ora:

<u>lemma</u> 4. <u>Se R è quasibooleana allora le immagini e le controimmagini in essa di chiusi sono chiuse.</u>

dim. Sia Y un chiuso di T, $X = R(Y)$ e $x \in X$.

Per ogni $y \in Y$, $R(y)$ è un chiuso contenuto in X e perciò un chiuso con $x \notin R(y)$.

Perciò esiste almeno un clopen p_y con $x \in p_y$ e $p_y \cap R(y) = \emptyset$. Chiaramente $y \notin p_y$ e allora si ha $Y \cap \bigcap_{y \in Y} R^{-1}(p_{y_i}) = 0$. Per la compattezza ne

segue che esistono punti $y_1, y_2, \dots, y_n$ in numero finito con $Y \cap \bigcap_{1 \le i \le n} R^{-1}(p_{y_i}) = 0$, onde $X \cap \bigcap_{1 \le i \le n} p_{y_i} = 0$. Poichè ciò vale per ogni $x \in X$ X è chiuso.

Sia X un chiuso di S e $Y = R^{-1}(X)$. Preso $y \notin Y$ sarà R(y) chiuso e disgiunto da X onde (compattezza) esisterà un clopen p contenente X e disgiunto da R(y). Ora $R^{-1}(p)$ risulta esser chiuso, contenere X e non avere tra i suoi elementi y. Così Y è chiuso.

<u>lemma</u> 5. <u>Se una $R \subseteq T \times S$ è quasibooleana allora si ha</u>: $(\bar{\lambda} R)(p) = R^{-1}(p)$.

(p W)

dim. Si ha, per ogni $R \subseteq T \times S$:

$(\bar{\lambda} R)(p) = \bigcap \{q \in P$: per ogni $(y,x) \in R$ se $x \in p$ allora $y \in q\}$. $(p \in A)$

Così risulta ovvio che la chiusura di $R^{-1}(p)$ è $(\bar{\lambda} R)(p)$. Come caso particolare si ha l'asserto

<u>teorema</u> 1. <u>I quasiemimorfismi sono tutti e soli i chiusi in $\bar{K}$</u>.

dim. Si è già visto (lemma 1 e successiva osservazione) che ogni chiuso in $\bar{K}$ è un q.e..

Sia f un q.e. e poniamo $R = \bar{\lambda} f$. Si ha:

$R = \{(y,x)$: se $x \in p$ allora $y \in q\}$ e, per $p \in A$:

$(\bar{\lambda} R)p = R^{-1}(p) = \{y$: esiste un $x \in p$ con $yRx\} =$
$= \{y$: esiste un $x \in p$ con: se $x \in p$ allora $y \in fp\} =$
$= \{y: y \in fp\} = fp$

<u>teorema</u> 2. <u>Le relazioni quasibooleane sono tutti e soli i chiusi in λ</u>.

dim. Si è già visto (lemma 2, lemma 3) che ogni chiuso in λ è quasibooleano. Sia R quasibooleana e $f = \bar{\lambda} R$ cosicchè, per $p \in A$, sarà $fp = R^{-1}(p)$ chiuso. Si ha:

$\bar{\lambda} f = \{(y,x)$: per ogni $p \in A$ se $x \in p$ allora $y \in fp\} = \{(y,x)$: per ogni $p \in A$ $y \in R^{-1}(p)$ oppure $x \notin p\} \supseteq R$ e occorre dimostrare l'inclusione inversa. Sia $y \not R x$. Sarà $x \notin R(y)$ ma allora, essendo R(y) chiuso per il lemma 4, esisterà un $p \in A$ con $x \in p$ e $p.\ R(y) = 0$. Si ha allora $y \notin R^{-1}(p)$ e l'inclusione è dimostrata.

Riassumendo, e scrivendo a volte α^* per $\bar{\lambda}\alpha$ e $\bar{\lambda}\alpha$ (il contesto renderà chiaro l'uso) si ha una biiezione $\bar{\lambda}$ dall'insieme dei q.e. all'insieme delle relazioni quasibooleane con:

yf^*x se e solo se per ogni $p \in A$ da $x \in p$ segue $y \in fp$ (f q.e.); $R^*p = R^{-1}(p)$ (R rel. q.b.)

E' poi chiaro che $\bar{\lambda}$ bietta l'insieme degli

"emimorfismi" (applicazioni da A a B normali e additive) sull'insieme delle relazioni booleane (relazioni fra T ed S per le quali la immagine di un punto sia sempre un chiuso e la controimmagine di un clopen sia sempre un clopen).

In genere il passaggio da un'algebra di Boole con emimorfismi al suo spazio duale con certe relazioni booleane equivale a considerazioni semantiche ed offre vantaggi notevoli fra i quali numerosi teoremi "di rappresentazione".

III. DUALITA' PER PROPRIETA' DI EMIMORFISMI

E' facile, data una proprietà di emimorfismi, trovare una proprietà valida per tutte e sole le relazioni booleane duali o viceversa; più difficile è, in genere, trovare una formulazione "interessante". Ciò è stato fatto per molte proprietà di emimorfismi esprimibili come identità booleane. Ci limiteremo ad alcuni casi di interesse logico.

1. Operatori chiusura.

Si tratta di emimorfismi (quindi se k è uno di essi: (1) $ko = o$ e (2) $k(p+q) = kp + kq$) con le ulteriori proprietà:

(k3)	$p \leq kp$	R è riflessiva
(k4)	$kkp \leq kp$	R è transitiva

dalle quali si ha anche:

(k5)	$k1 = 1$	$\mathcal{D}R = S$
(k6)	$kkp = kp$	R è transitiva e se xRy esiste uno z con xRz e zRy.
(k7)	$k(kp \cdot kq) = kp \cdot kq$	
(k8)	$\nu p \geq \nu kp$	
(k9)	se $p \leq q$ allora $kp \leq kq$	
(k10)	$k \nu k \nu k \nu kp = k \nu kp$	

di cui si sono date sopra alcune "duali" (posto $R = (\overline{\lambda} k)^{-1}$)

I principali motivi per considerare questi operatori riguardano gli operatori modali e le logiche intuizionistiche.
Il quantificatore esistenziale dà luogo ad un operatore di questo tipo ma con ulteriori proprietà che ne rendono necessario uno studio ulteriore.

2. Quantificatori.

Si tratta di chiusure in cui vale inoltre la:

(q3) $k(\nu kp) = kp$

per i quali cioè ogni elemento "aperto" è chiuso. Dal punto di vista logico ciò è connesso col fatto ovvio che la quantificazione di una variabile già vincolata non altera l'espressione. Osserviamo che, sotto la (k3), possiamo considerare al posto della (q3) la: $k(\nu kp) \leq \nu kp$. Una proprietà duale di questa è:
se $x \not R y$ e yRz allora $x \not R z$, ossia: se xRz e yRz allora xRy. Sotto le (k3),(k4) questa proprietà equivale alla simmetrica, onde: le duali dei quantificatori sono tutte e sole le equivalenze (booleane).
Si hanno tanti quantificatori quante sono le variabili. Il caso di una sola variabile dà luogo alle"algebre monadiche", altrimenti si hanno le "cilindriche" e le "poliadiche".

3. Predicati speciali.

Per ora è stato esaminato a fondo solo il caso del predicato "Theor" ma è possibile trattare altri casi purchè si abbia:

se $\vdash p \leftrightarrow q$ allora $\vdash P(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \leftrightarrow P(\overline{\ulcorner q \urcorner})$ dove $\overline{\ulcorner r \urcorner}$ è un "nome" per un oggetto associato ad r. (il caso più noto è quello dell'aritmetica, in cui $\ulcorner r \urcorner$ è il gödeliano di r e $\overline{n}$ il numerale del numero n). In tutti questi casi grande rilievo avrà il lemma del punto fisso (per qualunque espressione $\alpha(x)$ con una variabile libera, x, esiste una p con $\vdash p \leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner p \urcorner})$) e le sue varie generalizzazioni. L'operatore che si ottiene al quoziente, τ, non è un emimorfismo ma lo è $\sigma = \nu\tau\nu$ per il quale si ha:

		e per τ:
(σ3)	$\sigma(p \cdot \nu\sigma p) \geq \sigma p$	$\tau(\tau p \to p) \leq \tau p$
	da cui	
(σ4)	se $p \leq q$ allora $\sigma p \leq \sigma q$	se $p \leq q$ allora $\tau p \leq \tau q$
(σ5)	$\sigma(p \cdot \nu q) \geq \sigma p \cdot \nu\sigma q$	$\tau(p \to q) \leq \tau p \to \tau q$
(σ6)	$\sigma\sigma p \leq \sigma p$	$\tau p \leq \tau\tau p$
(σ7)	$\sigma(p \cdot q) \leq \sigma p \cdot \sigma q$	$\tau(p+q) \geq \tau p + \tau q$
(σ8)	$\sigma 1 \geq \sigma p$	$\tau 0 \leq \tau p$
(σ9)	$\sigma(p \cdot \nu\sigma p) = \sigma p$	$\tau(\tau p \to p) = \tau p$
(σ10)	$\sigma\nu\sigma^n p = 1$	$\tau\nu\tau^n p = \tau 0$
(σ11)	se $p \leq \sigma p$ allora $p=0$	se $\tau p \leq p$ allora $p=1$

con un po' di pazienza si dimostra che viceversa un emimorfismo per cui valgono (σ6) e (σ11) soddisfa (σ3). Come duale di (σ6) sappiamo esserci la transitività, quanto a (σ11) si trova la"fondatezza relativa" ossia "ogni clopen am

mette elementi minimali".

La teoria delle "algebre diagonalizzabili" si è molto sviluppata e non è il caso di tentare di riassumerla: citiamo solo alcuni fatti basilari.

1. L'algebra di Lindenbaum dell'aritmetica peaniana è generica per la varietà delle algebre diagonalizzabili. (SOLOVAY).
2. L'algebra di cui sopra contiene l'algebra libera su un'infinità numerabile di generatori (rafforzamento dovuto a F. MONTAGNA).
3. Punto fisso. Sia $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un polinomio (nel senso A.U.) della varietà delle diagonalizzabili, con x occorrente solo sotto l'azione di σ. Allora esiste uno e solo polinomio $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tale che $f(g(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_1, y_2, \ldots, y_n) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (C. BERNARDI; una dimostrazione estesa della I.D.A. di A. URSINI è dovuta a G. SAMBIN che fornisce anche un procedimento effettivo per ricavare g da f.).

Quanto dell'aritmetica, del suo carattere di parziale ontologia e dei fenomeni diagonali sia reso dalle algebre diagonalizzabili si vede dal fatto che è possibile trattare in modo logico-algebrico la validità.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto per le algebre diagonalizzabili che disponga anche di una infinità numerabile di variabili proposizionali. La $\models$ viene resa nel seguente modo.

Fissiamo una biiezione all'insieme delle variabili proposizionali, indichiamo con $*$ la biiezione e la sua inversa. Definiamo una φ di dominio l'insieme dei termini ponendo, dopo aver fissato una variabile proposizionale, p:

$\varphi 0 = p \wedge (\neg p)$

$\varphi 1 = \neg \varphi 0$

$\varphi x = x^*$

$\varphi \neg t = \neg \varphi t$

$\varphi (t_1 + t_2) = \varphi t_1 \vee \varphi t_2$

$\varphi \tau t = t \simeq 1$

Definiamo poi una φ^* di dominio l'insieme delle identità ponendo:

$$\varphi^* (t_1 \simeq t_2) = \varphi (t_1 \leftrightarrow t_2)$$

Analogamente si definisce una inversa, ψ.

La φ^* rende $\models$. Si ha:

$t_1 \simeq t_2$ è una identità delle a.d. se e soltanto se $\varphi^*(t_1 \simeq t_2)$ è valida (la dim. è complicata).

$\langle A,C \rangle$ è monadica

g è un endoemimorfismo di A

$g\nu C = \nu g$

$ag = C$

a è un endomorfismo di A con $aC = C$, $Ca = a$

La teoria delle dualità ha applicazioni interessanti.

2. Sensatezza e progressioni di emimorfismi.

L'applicazione di criteri vagamente neopositivisti all'aritmetica porta alla considerazione, nell'aritmetica peaniana, della chiusura deduttiva del seguente insieme:

$V_0 = \{p: \text{non} \vdash \neg p \text{ e } \vdash \neg p \rightarrow \text{Theor}(\overline{\ulcorner \neg p \urcorner})$

come insieme delle proposizioni "sensate e vere" dell'aritmetica stessa.

Analogamente e assai più in generale si può considerare in ogni algebra diagonalizzabile il filtro generato dall'insieme:

$M = \{p \in A: p \neq 0 \text{ e } \sigma p \leq p\}$

in due recenti lavori R. Magari studia la definibilità nel quoziente A/F di un operatore che "traduca" F: si tratta di vedere quando "passa al quoziente" l'operatore $\dot{F}$ definito da:

$$\dot{F}p = \tau p + \bigvee_{q_0, q_1, \ldots q_n \in A} \nu\sigma(\nu p \prod_i q_i) \prod \sigma q_i \cdot \nu\sigma(\nu q_i \cdot \sigma q_i)$$

L'operatore così ottenuto può essere o no di Löb e, poichè il procedimento è iterabile sotto certe condizioni si può costruire un analogo algebrico della teoria delle progressioni ordinali di teorie di Turing-Fefermann.