Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

CATEGORICITA' E ALGEBRA

ANNALISA MARCJA (Trento)

1. Introduzione

Scopo di queste lezioni è quello di dare una rassegna della "Teoria della categoricità applicata". Cercheremo di illustrare alcuni teoremi di isomorfismo in algebra, dimostrati sistematicamente usando i metodi "modellistici" dovuti a Ryll-Nardzewski, Morley, Shelah. Nella I lezione verrà discusso il concetto di categoricità in generale, mentre nella II e nella III si esporranno i più recenti risultati sulla caratterizzazione, rispettivamente di alcune algebre $\aleph_0$-categoriche e di alcune $\aleph_1$-categoriche.

2. Teorie categoriche

Le teorie matematiche possono essere divise in due classi. Una include le teorie costruite esplicitamente con lo scopo di descrivere un certo dominio matematico definito come i numeri naturali, i numeri interi, i numeri reali, il piano euclideo ecc. L'altra include teorie con lo scopo di mettere in luce proprietà che sono comuni a molti domini, per es. la teoria dei gruppi, le algebre di Boole ecc. Per il primo caso sorge naturalmente il problema se queste teorie descrivono il dominio che intendono descrivere, oppure descrivono incidentalmente un maggior numero di domini matematici. Sorge cioè il problema della categoricità. Quest'ultimo concetto ha subito delle variazioni, ma la intuizione generale è rimasta la stessa: un insieme di enunciati T è categorico se determina i suoi modelli univocamente (a meno di isomorfismi). Sembra che questo concetto sia stato formulato per primo da Veblen [50] nel 1904, quando ancora non era stato precisato rigorosamente il concetto di modello, e con le ricerche matematiche successive, ha assunto diversi significati.

Possiamo citare (cfr. Grzegorczyk [21]) almeno 4 classi di modelli che possono arrogarsi il diritto di essere usati nella definizione di categoricità.

(i) Modelli nel senso più generale del termine.

(ii) Modelli di cardinalità fissata.

(iii) Modelli con una interpretazione assoluta dei concetti insiemistici.

(iv) Modelli numerabili di tipo speciale.

(v) Si potrebbe ancora più generalmente introdurre un concetto di <u>pseudo categoricità</u> richiedendo che non i modelli siano isomorfismi, bensì le algebre di Boole dei loro sottoinsiemi parametricamente definibili.

Da qui in avanti ci limiteremo a <u>teorie elementari</u> in linguaggio contabile.

(i) Solamente le teorie che descrivono modelli finiti possono essere categoriche, come segue dal teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski. "<u>Se</u> T <u>ha un modello infinito, allora</u> T <u>ha modelli di qualunque cardinalità infinita</u>"
Questo risultato ha suggerito di restringere il concetto di categoricità a modelli di cardinalità fissata.

(ii) E' la cosiddetta "<u>categoricità in potenza</u>". Essa fu introdotta da Łoš [25] e Vaught [48] ed è strettamente legata alla completezza. Infatti vale il
<u>Teorema 1</u> (Łoš-Vaught-Tarski)
<u>Se</u> T <u>è una teoria priva di modelli finiti e categorica in qualche potenza, allora</u> T <u>è completa.</u> Su questo concetto ci torneremo più dettagliatamente nelle prossime

lezioni.

(iii) Sia T una teoria in un linguaggio dei predicati del I ordine con l'aggiunta di un predicato binario $\in$ e di un predicato unario Z .
Un modello $\mathfrak{M} = \langle M, R_1, \ldots, \in_M, Z_M \rangle$ è chiamato <u>standard di tipo</u> γ , o <u>modello con una interpretazione assoluta di</u> Z <u>e</u> $\in$, quando $\mathfrak{M}$ è modello di T e la relazione $\in_M$ è l'usuale $\in$ ristretta agli elementi di M, (cioé $\mathfrak{M} \models x \in y$ sse $x,y \in M$ e $x \in y$) e Z_M è interpretato come la proprietà di essere un insieme, ristretta agli elementi di M. Cioé $\mathfrak{M} \models Z(x)$ sse $x \in M$ e x è un insieme.
Inoltre $M = \bigcup_{\xi<\gamma} M_\xi$ dove gli M_ξ sono definiti induttivamente nel seguente modo:
$x \in M_0$ sse $x \in M$ e x non è un insieme.
$x \in M_{\alpha+1}$ sse $x \subset M_\alpha$.
$x \in M_\eta$ sse esiste $\alpha < \eta$ t.c. $x \in M_\alpha$.
T è allora <u>categorica di tipo</u> γ, con un interpretazione assoluta dei concetti insiemistici sse 2 modelli standard di tipo γ sono isomorfi.
Questo concetto di categoricità corrisponde a quello di Veblen.
In questo senso l'aritmetica dei naturali e la geometria euclidea, ciascuna arricchita con $\in$ e Z sono categoriche. Infatti consideriamo l'aritmetica nel seguente linguaggio: P_1 (simbolo predicativo unario, per numero), P_2 (simbolo predicativo binario per il successore) con gli assiomi di Peano, il seguente assioma di induzione:

$$\forall x,y \{[(\forall u \neg P_2(y,u) \wedge y \in x) \wedge \forall z,v(z \in x \wedge P_2(v,z) \to v \in x)] \to$$
$$\to \forall u(P_1(u) \to u \in x)\}$$

e l'assioma $\forall x(P_1(x) \longleftrightarrow \neg Z(x))$ che esprime che i numeri naturali sono i soli oggetti che non sono insiemi.
Questa teoria è già categorica nel tipo 2. E' anche categorica per ogni ordinale l'esistenza del quale è garantita dalla teoria degli insiemi che si è assunta nella metateoria.
Analogamente per l'aritmetica dei numeri reali o per la geometria euclidea possiamo assumere gli usuali assiomi con l'aggiunta dell'assioma che solamente i numeri reali (rispettivamente i punti) non sono insiemi, e queste sono categoriche a partire dal tipo 2. Non è conosciuto nessun esempio di teoria categorica in tipo più alto, ma non categorica nel tipo 2.
La teoria dell'ordine denso non è categorica in questo senso, perché abbiamo ordini densi di qualunque cardinalità; ma essa diventa categorica se aggiungiamo l'assunzione che l'insieme degli elementi che non sono insiemi è numerabile.
Nel paragonare questo concetto di categoricità con quelli descritti, prima è necessario ricordare che questo si riferisce soltanto a quelle teorie che includono relazioni che vogliamo interpretare come insiemistiche. Non è utile quindi per quelle teorie elementari per le quali vogliamo considerare un solo modello nel senso usuale. Le teorie introdotte, inoltre, non possono essere considerate "genuinamente" elementari.

(iv)$_a$ Vogliamo dapprima descrivere i modelli costruttivi di una teoria T. (cfr. Grzegorczyk [20]).
Sia T una teoria in un linguaggio L. (a_ϕ) e (f_ϕ) due sequenze, rispettivamente di costanti e di simboli funzionali indiciati dalle formule di T.

Definiamo la skolemizzata (skl(T)) della teoria T nel seguente modo:
se ϕ è una formula in forma normale prenessa allora

$$\mathrm{skl}(\phi)=\begin{cases}\psi(a_\phi) \text{ se } \phi \text{ è della forma } \exists v_\nu \psi(v_\nu)\\ \forall v_{k_1}\ldots\forall v_{k_n}\ \psi(f_\phi(v_{k_1}\ldots v_{k_n})) \text{ se } \phi \text{ è della forma}\\ \quad\forall v_{k_1},\ldots,\forall v_{k_n}\exists v_\nu \psi(v_\nu)\\ \phi \text{ negli altri casi}\end{cases}$$

$\mathcal{M}$ è detto modello costruttivo per T se è modello di skl(T) e M è generato dalle costanti (di L + le costanti di Skolem aggiunte).
T è detto costruttivamente categorico sse ha un solo modello costruttivo, a meno di isomorfismi. La critica maggiore a questo tipo di definizione deriva dal fatto che il concetto non è estensionale, nel senso che di due teorie equivalenti, una può essere costruttivamente categorica e l'altra no. Ma questo concetto ha ugualmente un certo interesse anche se non vogliamo occuparcene in questa trattazione. Rimandiamo a [20], [21] per ulteriori informazioni. Vogliamo fare alcune considerazioni: i modelli sono costruttivi nel senso che l'esistenza è determinata in essi da una certa funzione che è definita esplicitamente e computabile (sui numeri naturali che in modo naturale enumerano gli elementi di L). Di più essendo modelli di termini, essi, in un certo senso, corrispondono alle algebre libere. Da qui la categoricità significa che la teoria in questione determina un modello sui suoi termini, in modo tale che tutte le identificazioni di parole e, più generalemnte , tutte le relazioni sono determinate dalla teoria.
Il teorema fondamentale per il concetto di categoricità

costruttiva è il seguente teorema di esistenza:

Teorema 2.

Se T è una teoria consistente e almeno un enunciato di T comincia con un quantificatore esistenzale, allora T ha un modello costruttivo.

Come esmpio, per chiudere questo argomento, vogliamo citare che l'aritmetica Q di R. Robinson è costruttivamente categorica così come l'aritmetica dei numeri reali (il modello è l'insieme dei reali algebrici), mentre la teoria dell'ordine lineare denso con almeno 2 elementi è essenzialmente non categorica (cioé non ha alcuna estensione costruttivamente categorica).

(iv)$_b$ $\mathcal{M}$ è detto modello minimo di T se non ha sottomodelli propri.

Potremmo allora chiamare categorica una teoria se ha almeno un modello minimo e questo è unico a meno di isomorfismi.

L'aritmetica è allora categorica perché ogni modello minimo è isomorfo al modello standard e così la teoria completa dei numeri reali.

Questo concetto non sembra però molto interessante, perché sono "poche" le teorie con modello minimo.

Si può però generalizzare il concetto nel seguente modo: $\mathcal{M}$ è detto un modello minimale per T sse $\mathcal{M}$ è un modello di T e per ogni sottomodello $\mathcal{N}$ di $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ è isomorfo a $\mathcal{M}$. T è allora μ-categorica se T ha un unico modello minimale a meno di isomorfismi. Si può dimostrare che l'ordine lineare denso è μ-categorico. Di più:

Teorema 3.

Una teoria priva di modelli finiti che ha modelli minimali ed è $\aleph_0$-categorica è μ-categorica.

(v) Il concetto di pseudocategoricità è stato introdotto in Mangani-Marcja [29] (cfr. anche [30]) ed è tuttora in fase di studio.

Sia T una teoria contabile, completa e con l'eliminazione dei quantificatori. $\mathcal{M}$ sia un modello di T. Sia $\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ l'algebra di Boole ottenuta dall'insieme F^1_M delle formule a parametri in M con una sola variabile libera quozientato rispetto alla seguente relazione di equivalenza $\phi, \psi \in F^1_M$

$$\phi \sim_M \psi \text{ sse } Th(\mathcal{M}_M) \vdash \forall v(\phi(v) \leftrightarrow \psi(v)).$$

T è detta pseudo k-categorica se per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $|M| = |N| = k$ risulta $\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ isomorfa a $\mathfrak{B}(\mathcal{N})$.

Abbiamo:

Teorema 4 (Mangani-Marcja, Lascar, Baldwin ecc.)

Se $k > \aleph_0$, T è pseudo-k-categorica sse T è k-categorica.

Chiaramente il teorema 4 non vale per $k = \aleph_0$ (per es. la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 è pseudo-$\aleph_0$-categorica, ma non $\aleph_0$-categorica).

Abbiamo però:

Teorema 5.

Se T è $\aleph_1$-categorica allora T è pseudo-$\aleph_0$-categorica.

Interessante è il seguente

Teorema 6.

Ogni algebra di Boole atomica numerabile è isomorfa a

(ii) $\mathfrak{M} \models \alpha^{(n)}\,[a_1,\dots,a_n]$ per $n=1,2,\dots$
(iii) $\mathfrak{N} \models \alpha^{(n)}\,[b_1,\dots,b_n]$ per $n=1,2,\dots$

Supponiamo di aver costruito la sequenza fino ad un certo punto $n_o (0 \leq n_o)$. Se n_o è pari poniamo:

Def. 1. a_{n_o+1} = il primo elemento diverso da $a_1,\dots,a_{n_o}$

$\alpha^{(n_o-1)}$ = formula atomica di $\mathfrak{B}_{n_o+1}(T)$ t.c. le relazioni (i) e (ii) valgono per essa.

b_{n_o+1} = il primo elemento di N per cui vale (iii).

($\alpha^{(n_o+1)}$ esiste per la finitezza di $\mathfrak{B}_{n_o+1}(T)$ e b_{n_o+1} esiste usando l'induzione).

Se n_o è dispari, scambiamo i ruoli dei modelli $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{N}$ nella definizione 1.

E' facile vedere che $(\mathfrak{M}, a_1,\dots,a_n) \equiv (\mathfrak{N}, b_1,\dots,b_n)$ per ogni n . Evidentemente la corrispondenza $a_n \mapsto b_n$ è un isomorfismo di $\mathfrak{M}$ su $\mathfrak{N}$.

$\longrightarrow$ Supponiamo per assurdo che per qualche n, l'algebra $\mathfrak{B}_n(T)$ sia infinita (e quindi numerabile). Esiste perciò una sequenza di formule $\psi^k(v_1,\dots,v_n)$ t.c.

$$[\psi^k] < [\psi^{k+1}] \quad \text{e} \quad [\psi^k] \neq [\psi^{k+1}] \quad \text{per } k=1,2,\dots$$
$$\text{e} \quad \bigcup [\psi^k] = 1.$$

Allora esiste un modello numerabile $\mathfrak{M}$ che possiede la seguente proprietà:

(*) esistono $a_1,\dots,a_n \in \hat{M}$
$\mathfrak{M} \models \psi^k\,[a_1,\dots,a_n]$ per ogni k.

Esiste però un modello $\mathfrak{N}$ non possedente la proprietà (*).
(Per compattezza: aggiungiamo al linguaggio di T nuove costanti $c_1,\dots,c_n$ e aggiungiamo a T $\neg\psi^k(c_1,\dots,c_n)$ per ogni k.)

Così $\mathfrak{N}$ non è isomorfo a $\mathfrak{M}$. ■ (La dim. riportata è quella originale di Grzegorczyk.).

I risultati teorici che abbiamo sulla $\aleph_o$-categoricità sono i seguenti:

Ricordiamo che una struttura $\mathfrak{M}$ è $\aleph_o$-categorica se Th($\mathfrak{M}$) è $\aleph_o$-categorica.

<u>Teorema 9</u> (Grzegorczyk [22])

<u>La classe delle strutture $\aleph_o$-categoriche è chiusa rispetto al prodotto cartesiano finito.</u>

Il teorema 9 è stato anche dimostrato (indipendentemente) da Waskiewiz e Weglorz [51] che hanno dimostrato anche la chiusura rispetto alle potenze ridotte infinite per le quali $2^I/D$ ha un numero finito di atomi.

Le applicazioni della $\aleph_o$-categoricità all'algebra, cioé essenzialmente la ricerca di caratterizzazioni di algebre $\aleph_o$-categoriche è cominciata nel 1969 e consiste nell'applicazione sistematica del teorema di Ryll-Nardzewski.Il primo risultato completo è quello per gli ordini totali dovuto a Rosenstein [39]. Rosenstein ha definito un insieme $\mathcal{M}$ di tipi d'ordine lineari <u>contabili</u> per cui vale il seguente:

<u>Teorema 10.</u>

<u>Sono equivalenti le seguenti proposizioni</u>

(i) $[M] \in \mathcal{M}$
(ii) M è $\aleph_o$-categorico
(iii) $\mathfrak{B}_2(\mathrm{Th}(M))$ è finito.

Precisamente:

Un sottoinsieme M_1 è detto un <u>segmento</u> se da $a \in M_1$, $b \in M_1$ e $a < c < b$ segue che $c \in M_1$. Un insieme ordinato N è uno <u>spezzamento</u> di M se N è un insieme di segmenti di M che ricoprono M e se $M_1 <_N M_2$ sse $a < b$ con $a \in M_1$ e $b \in M_2$. Gli elementi di N sono chiamate le <u>parti</u> di M (relative ad N). Sia F un insieme non vuoto finito di tipi d'ordine. Supponiamo che ci sia uno spezzamento di M di tipo η (razionali) t.c. ogni parte dello spezzamento ha il suo tipo d'ordine in F e t.c. tra ogni 2 parti ci sono parti aventi tutti i tipi d'ordine in F. Il tipo d'ordine di $\dot{M}$ è così determinato dall'insieme F ed è denotato con σF.

$\mathcal{M}$ è allora il più piccolo insieme di tipi d'ordine lineari contenente 1 e chiuso rispetto a $+$ e σ.

Altri risultati per strutture relazionali sono:

<u>Teorema 11</u> (cfr. [28])

<u>Un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ è $\aleph_0$-categorica sse $\mathcal{B}$ ha solamente un numero finito di atomi.</u>

Dim: $\leftarrow$ si dimostra mediante un argomento "back and forth"

$\rightarrow$ Per ogni $n < \omega$, consideriamo la formula $\phi_n(v_0)$ che esprime che v_0 è l'unione di n atomi. Se $n \neq m$, $\phi_n(v_0)$ e $\phi_m(v_0)$ sono incompatibili. Così se $\mathcal{B}$ ha infiniti atomi, allora $\mathfrak{B}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{B}))$ è infinita e così $\mathcal{B}$ non può essere $\aleph_0$-categorica. ∎

Analogamente:

<u>Un'algebra di Post generalizzata</u> L (cfr. [2] pag. 204) è un prodotto libero $C * B$ nella varietà di tutti i reticoli distributivi con 0 e 1 di una catena C, con 0 e 1, e di un'algebra di Boole $\mathcal{B}$. Se C è finita, allora la definizione è equivalente all'usuale definizione di algebra di Post di ordine finito.

<u>Teorema 12</u> (Olin [36])

<u>Se $L = C * B$ è un'algebra di Post generalizzata numerabile allora L è $\aleph_0$-categorica sse C e B sono $\aleph_0$-categoriche.</u>

I risultati precedenti anche se interessanti, essendo molto legati all'enunciato del teorema di Ryll-Nardzewski, non servono ad illustrare in generale le tecniche da usare per la ricerca di algebre $\aleph_0$-categoriche in una classe, ricerca che è in generale molto difficile. Vediamo cosa significa determinare se una data algebra è $\aleph_0$-categorica o no. Prendiamo un'algebra A contabile; questa è $\aleph_0$-categorica se ogni algebra contabile che è elementarmente equivalente ad A, è isomorfa ad A, cosicché A è caratterizzata, a meno di isomorfismi, nella classe delle algebre contabili a cui essa appartiene, dalle sue proprietà del I ordine.

Possiamo definire una relazione di equivalenza E_1^n su A^n nel seguente modo:

$a, b \in A^n$, $a\,E_1^n\,b$ sse a e b soddisfano le stesse formule (prive di parametri). Il teorema di Ryll-Nardzewski equivale allora al fatto che A è $\aleph_0$-categorica sse $A^n/_{E_1^n}$ è finita per ogni $n \in N$.

Per mostrare che un'algebra A è $\aleph_0$-categorica è sufficiente trovare una lista T di proprietà del I ordine che A ha e che A non ha in comune con nessuna algebra contabile non isomorfa ad A; perché allora ogni algebra contabile che è elementarmente equivalente ad A è isomorfa ad A. Questo insieme T può essere allora pensato come un'insieme di assiomi per A, o come una definizione elementare di A e ciò è di interesse logico. Ma possiamo dare un'altra condizione puramente algebrica, necessaria e sufficiente, perché un'algebra <u>conta-</u>

bile sia $\aleph_0$-categorica. Definiamo la seguente relazione E_2^n di equivalenza su A^n.

$a\ E_2^n\ b$ sse se c'è un automorfismo di A che porta a in b (cioé sse a e b sono nella stessa n-orbita) .

Abbiamo che

A contabile è $\aleph_0$-categorica sse per ogni n il numero delle n-orbite è finito.

Oss. $\leftarrow$ Vale sempre anche senza la contabilità di A.

Riassumendo allora il teorema di Ryll-Nardzewski può essere formulato:

Teorema 8 bis

Sono equivalenti per un'algebra A contabile.

(1) $Th(A)$ è $\aleph_0$-categorica

(2) $\mathfrak{B}_n(Th(A))$ è finita per ogni n

(3) A^n/E_1^n è finita per ogni n

(4) A^n/E_2^n è finita per ogni n

Dim: L'unico caso non banale è (3) $\rightarrow$ (4) e questo può essere dimostrato dai risultati in Vaught [49] ■

Come corollario immediato del terema 8 abbiamo:

Teorema 13 (cfr. Baldwin [3], Baldwin-Rose [5]).

Se un'algebra A è $\aleph_0$-categorica, allora è uniformemente localmente finita. (cioé esiste una funzione $f: \omega \rightarrow \omega$ t.c. per $X < A$ se $|X| < n$ allora $|<X>| < f(n)$.)

Dim: Supponiamo $X = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Se $y \in <X>$ definisco $P_y = \{p(v_1, \dots, v_{n-1}) : A \models y = p(x_1, \dots x_{n-1})\}$. Chiaramente se $y_1 \neq y_2$ allora $P_{y_1} \neq P_{y_2}$ e quindi se ci fossero sottoalgebre generate, arbitrariamente grandi, allora $\mathfrak{B}_n(Th(A))$ non

sarebbe finita. ■

Queste tecniche ci permettono di dare la caratterizzazione completa dei gruppi abeliani $\aleph_0$-categorici.

Teorema 14 (Rosenstein [40])

Un gruppo abeliano G è $\aleph_0$-categorico sse ha ordine limitato (cioé esiste n t.c. $g^n = 1$ per ogni $g \in G$).

Dim: $\rightarrow$ segue immediatamente dal fatto che G è uniformemente localmente finito.

$\leftarrow$ Se G è abeliano di ordine limitato allora per un teorema di Prüfer (cfr. Kaplansky [23] pag. 17) è somma diretta di gruppi ciclici i cui ordini sono potenze di primi. Questo allora permette di trovare un'assiomatizzazione $\aleph_0$-categorica di un qualunque gruppo abeliano di ordine limitato. ■

Sfruttando il teorema 11 e i risultati di Waskiewicz e Weglorz [51] , Macintyre e Rosenstein [28] hanno dato una completa caratterizzazione degli anelli unitari regolari $\aleph_0$-categorici (privi cioé di elementi nilpotenti) come anelli di funzioni continue.

La tecnica è sempre derivata dal teorema di Ryll-Nardzewski. Dapprima si dimostra che se R è un qualunque anello $\aleph_0$-categorico, allora il gruppo additivo di R ha ordine limitato ed esiste $f \in Z[x]$ che è identicamente nullo su R. Dopo, il caso generale viene ridotto al caso di R il cui gruppo additivo è un p-gruppo per qualche primo p, sfruttando il teorema 9. Supponiamo ora che R non abbia elementi nilpotenti diversi da 0. Allora R ha caratteristica p, così è un'algebra sul campo F_p di p elementi. Ma R soddisfa l'identità $f = 0$ descritta sopra, così per un teorema di Mc Coy [31] , R è commutativo. Stiamo trattando allora algebre commutative R

su F_p, soddisfacenti una identità polinomiale $f=0$, con unità e senza elementi nilpotenti diversi da 0. Arens e Kaplanski [1] hanno dato un'importante teorema di struttura per R contabili soddisfacenti queste condizioni. Il teorema utile è una generalizzazione del teorema di Stone. Ad R si associa uno spazio booleano X, una sequenza finita X_i, $i<n$ di sottospazi chiusi di X, un campo finito F ed una sequenza F_i, $i<n$ di sottocampi di F. Viene data ad F la topologia discreta e si considera $C(X,F;(X_i)_{i<n},(F_i)_{i<n})$ l'anello delle funzioni continue $g: X \to F$ t.c. $g(X_i) \subset F_i$ per $i<n$. Allora (*) $R \simeq C(X,F,(X_i)_{i<n},(F_i)_{i<n})$. Il problema è ora trovare quali informazioni dà su X e X_i la $\aleph_0$-categoricità di R. L'idea chiave è usare la dualità di Stone. Sia $\mathcal{B}$ l'algebra duale di X. Allora ad X_i corrispondono ideali I_i di B. Così ad R viene associato un sistema relazionale $\mathcal{A}(R)$ consistente dell'algebra B con ideali privilegiati I_i, $i<n$. Macintyre e Rosenstein hanno mostrato come interpretare $\mathcal{A}(R)$ in R e hanno provato che se R è $\aleph_0$-categorico allora $\mathcal{A}(R)$ lo è. Sfruttando i risultati di Waskiewicz e Weglorz [51], si ottiene che per R soddisfacente (*) se $\mathcal{A}(R)$ è $\aleph_0$-categorico allora R è $\aleph_0$-categorico. Così il problema è riportato all'$\aleph_0$-categoricità di algebre di Boole con ideali privilegiati. E questo problema è completamente risolto. Infatti:

Teorema 15

Una struttura $(\mathcal{B}, I_0,\dots,I_{n-1})$ (dove $\mathcal{B}$ è un'algebra di Boole e $I_0,\dots,I_{n-1}$ sono ideali di $\mathcal{B}$) è $\aleph_0$-categorica sse, detta $H(\mathcal{B})$ l'algebra di Heyting degli ideali di $\mathcal{B}$, e $H_0(\mathcal{B})$ la sottoalgebra di $H(\mathcal{B})$ generata da $(0), I_0,\dots,I_{n-1}$ si ha:

i) $H_0(\mathcal{B})$ è finita

ii) qualunque sia $J \in H_0(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}/J$ ha soltanto un numero finito di atomi.

Baur [7] ha caratterizzato gli R-moduli $\aleph_0$-categorici, dimostrando i seguenti

Teorema 16

Per ogni anello contabile R ed ogni R-modulo contabile A, le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) A è $\aleph_0$-categorico

(ii) Esistono $n \in \omega$, R-moduli finiti $B_0,\dots,B_{n-1}$ e cardinali $k_0,\dots,k_{n-1} \leq \omega$ t.c. $A = \bigoplus_{i<n} B_i^{(k_i)}$

Teorema 17

Per ogni anello contabile le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) Ogni R-modulo è $\aleph_0$-categorico

(ii) R è finito ed esiste soltanto un numero finito di classi di isomorfismo di R-moduli indecomponibili

Teorema 18

Per ogni anello commutativo contabile R le seguenti sono equivalenti:

(i) ogni R-modulo è $\aleph_0$-categorico

(ii) R è un anello finito a ideali principali.

Non risulta che ci siano altre caratterizzazioni complete di algebre $\aleph_0$-categoriche. Importanti contributi (senza però ottenere condizioni necessarie e sufficienti) sono sui:

-Gruppi abeliani "by finite" (cioé gruppi aventi un sottogruppo abeliano di indice finito), Rosenstein [40], Cherlin-Rosenstein [15].

-gruppi (Sabbagh [43])

Un recentissimo risultato è il seguente:

Teorema 19

Ogni gruppo semplice G $\aleph_0$-categorico è finito.

Dim: Ricordiamo che se G è $\aleph_0$-categorico, allora G è localmente finito. Per un teorema di Kargapolov (cfr. Felgner [18] p. 318) per ogni gruppo semplice G localmente finito, infinito, ci sono infiniti gruppi semplici finiti non isomorfi che sono immagini omomorfe di sottogruppi di G. Ma se G è $\aleph_0$-categorico, questi gruppi finiti hanno esponente (= il minimo n t.c. $g^n = i$, per ogni $g \in G$) limitato. Hall e Higman nel 1956 hanno congetturato che c'è solo un numero finito di gruppi semplici finiti con un esponente fissato. Ma questa congettura segue dalla congettura, recentemente provata, che c'è solo un numero finito di gruppi semplici sporadici. Questo prova allora che non esiste un gruppo semplice infinito $\aleph_0$-categorico.

Recentemente Pillay [38] ha tentato di dare una formalizzazione del concetto di teoria $\aleph_0$-categorica, per la quali gli isomorfismi tra i suoi modelli contabili sono essenzialmente ottenuti da applicazioni biunivoche arbitrarie tra insiemi infiniti. Viene così introdotto il concetto di teoria molto semplice come la teoria di un particolare modello, detto modello molto semplice. Viene provato che le toerie molto semplici sono $\aleph_0$-categoriche, ω-stabili (v. dopo) e non finitamente assiomatizzabili.

4. $\aleph_1$-categoricità

Ricordiamo che 1-tipo su M è un insieme di formule con una variabile libera ed a parametri in M, massimalmente consistente con $Th(\mathfrak{M}_M)$. Una definizione semantica di 1-tipo è la seguente. Sia $\mathfrak{N}$ un'estensione elementare di $\mathfrak{M}$ e $m \in M$; allora $p = \{ \phi(v,\bar{n}) : \mathfrak{N} \models \phi(m,\bar{n}) \}$ è un 1-tipo. Denotiamo con $S(\mathfrak{M})$, spazio di Stone di $\mathfrak{M}$, l'insieme di tutti gli 1-tipi su M. La relazione tra la cardinalità di una struttura e la cardinalità del suo spazio di Stone porta a un importante invariante di teoria dei modelli. Così diciamo che T è λ-stabile se per ogni $\mathfrak{M} \models T$ con $|M| = \lambda$ $|S(M)| = \lambda$. (cfr. Shelah [45])

T è ω-stabile se è stabile in $\aleph_0$, che è equivalente ad essere stabile in ogni cardinale. T è stabile, se è stabile in qualche cardinale.

Morley [33] provò che una teoria $\aleph_1$-categorica è ω-stabile.
Poiché la ω-stabilità ha molte proprietà che la $\aleph_1$-categoricità non ha, ed è più facile caratterizzare le algebre ω-stabili delle $\aleph_1$-categoriche, la tecnica usata nelle applicazioni all'algebra è la seguente:
Per trovare le algebre $\aleph_1$-categoriche di una certa classe si determinano prima le ω-stabili e quindi si cerca di determinarne quelle che sono $\aleph_1$-categoriche.
Vediamo alcune proprietà delle strutture ω-stabili, che sono analoghe alle proprietà delle strutture $\aleph_0$-categoriche.

Proposizione 20 (cfr. Wierzejewski [52] , Cherlin-Reineke [14]).

Il prodotto diretto finito di strutture ω-stabili è ω-stabile.

Definizione

Una relazione $R \subseteq M^k$ è definibile su $\mathfrak{M}$ sse per qualche formula $\phi(v_0,\dots,v_{k-1})$ in L_M (l'indice indica la possibile presenza di parametri di M) abbiamo

$< m_0,\dots,m_{k-1} > \in R$ sse $\mathfrak{M} \models \phi\,[m_0,\dots,m_{k-1}]$. Una funzione f(x) è detta definibile sse la relazione "f(x) = y" è definibile.

Proposizione 21 (Cherlin-Reineke [14])

Sia A un sottoinsieme di M , $\mathfrak{M}$-definibile e $R_1,\dots,R_k$, $f_1,\dots,f_\ell$ siano relazioni e funzioni su A, $\mathfrak{M}$-definibili. Siano $a_1,\dots,a_m \in A$ arbitrari. Allora se $\mathfrak{M}$ è λ-stabile, allora $\mathfrak{A} = < A, \{R_i, f_j, a_k\} >$ è λ-stabile.

Per determinare quali strutture ω-stabili sono $\aleph_1$-categoriche utilizziamo il seguente:

Teorema 22 (Baldwin-Lachlan [4])

T è $\aleph_1$-categorica sse T è ω-stabile e ogni sottoinsieme definibile infinito di un modello di T ha la stessa cardinalità del modello.

Il primo risultato di caratterizzazione completa dei gruppi abeliani $\aleph_1$-categorici è di Macintyre [26] , che ha suggerito la tecnica per questo tipo di dimostrazioni. Il "trucco" consiste nel modificare teoremi o concetti classici, aggiungendo lo aggettivo definibile.
Per esempio il concetto di condizione della catena è molto utile in molte branche dell'algebra. Diciamo che l'algebra A soddisfa la condizione della catena discendente (ascendente) su sottoinsiemi di classe P se non esiste alcuna catena propriamente discendente (ascendente) infinita di sottoinsiemi di A di tipo P. (Un sottoinsieme di classe P può essere per esempio un sottogruppo, un sottogruppo normale, un ideale ecc.). Per quanto riguarda i gruppi abbiamo, per esempio,

Teorema 23 (Macintyre [26] , Shelah [44], Baldwin-Saxl [6] , Cherlin [9])

Se A è un gruppo ω-stabile, allora A soddisfa la condizione della catena discendente sui sottogruppi definibili.

Questo permette di ottenere la seguente caratterizzazione di tutti i gruppi abeliani ω-stabili

Teorema 24 (Garavaglia)

Se G abeliano soddisfa la condizione della catena discendente sui sottogruppi definiti da formule primitive positive, allora G è ω-stabile.

Teorema 25 (Macintyre [26])

Un gruppo abeliano è ω-stabile sse è somma diretta di un gruppo divisibile e di un gruppo di ordine limitato.

Teorema 26 (Macintyre [26])

Un gruppo abeliano A è $\aleph_1$-categorico sse è di una delle seguenti forme:

(i) A è una somma diretta di un gruppo finito e di una somma diretta infinita di copie di un fissato gruppo ciclico finito di ordine potenza prima

(ii) A è una somma diretta di un gruppo finito e di un gruppo divisibile che contiene solo un numero finito di elementi di ordine primo p, per ogni primo p

Dim: Per il teorema precedente $A = D_m \oplus C$. E' facile vedere che a meno che D_m o C sia finito, Th(A) ha un "2-cardinal-model" contraddicendo il teor. 22. Caso (i) corrisponde a D_m finito. Caso (ii) a C finito. Un ulteriore uso del teor. 22 e della struttura dei gruppi abeliani porta a più raffinate informazioni sugli altri addendi.

Un risultato più profondo è quello sui campi.

Teorema 27 (Macintyre [27])

Per un campo K le seguenti sono equivalenti:

(i) K è ω-stabile
(ii) K è $\aleph_1$-categorico
(iii) K è finito o algebricamente chiuso.

Il risultato del teorema è migliorato:
Shalah [44] ha dimostrato che un corpo $\aleph_1$-categorico è un campo algebricamente chiuso e Cherlin [12] ha dimostrato che un corpo ω-stabile è un campo algebricamente chiuso.
Zilber [53] ha caratterizzato tutti gli anelli di caratteristica 0, $\aleph_1$-categorici come algebre su campi algebricamente chiusi, di dimensione finita, irriducibili in somme dirette.
L'$\aleph_1$-categoricità sembra avere quindi un significato algebrico molto profondo. Ulteriori più raffinati esami, dove ancora intervengono spesso campi algebricamente chiusi possono essere trovati in Felgner [17], Cherlin-Reineke [14], Sabbagh [43], Baldwin-Rose [5].
La maggiore facilità dell'$\aleph_1$-categoricità rispetto alla $\aleph_0$-categoricità, ha suggerito di aggiungere l'ipotesi di stabilità all'$\aleph_0$-categoricità.

Il più profondo risultato in questa direzione è dovuto a Baur-Cherlin-Macintyre [8] :

Teorema 28

(i) Un sottogruppo stabile $\aleph_0$-categorico è nilpotente "by finite" (cioé ha un sottogruppo normale nilpotente di indice finito).

(ii) Un gruppo ω-stabile $\aleph_0$-categorico è abeliano "by finite" (cioé ha un sottogruppo normale abeliano di indice finito).

La dimostrazione è la più complicata vista finora e richiede tutte le techiche accennate.
Baur Cherlin e Macintyre riescono a dimostrare anche un viceversa del (ii).

Teorema 29 (Baur-Cherlin-Macintyre [8])

Sia G un gruppo localmente finito di esponente limitato. Sia A un sottogruppo normale abeliano di indice finito. Allora le seguenti sono equivalenti:

(1) G è $\aleph_0$-categorico.
(2) G è $\aleph_0$-categorico ed ω-stabile di rango di Morley finito.
(3) A è somma diretta di sottogruppi normali finiti di G di ordine limitato.

Usando i risultati di Baur [7], essi riescono a caratterizzare anche i gruppi totalmente categorici.

Teorema 30

Con le ipotesi e le notazioni del teorema 29, G è totalmente categorico sse $A = A_1 \oplus A_2$ dove A_1 è un sottogruppo normale finito di G e A_2 è somma diretta di un arbitrario numero di sottogruppi normali finiti F_i, dove gli F_i sono mutuamente isomorfi, via isomorfismi rispettanti l'azione di G e indecomponibili nel senso che $F_i = F'_i \times F''_i$ con $F'_i, F''_i \triangleleft G$ implica $F'_i = (1)$ o $F''_i = (1)$.

Analoghi risultati vengono forniti in [8] per gli anelli.
Lachlan [24] congetturò che una teoria stabile $\aleph_0$-categorica è ω-stabile.
Per quanto visto prima questa congettura nel caso dei gruppi diventa:
"Un gruppo stabile $\aleph_0$-categorico nilpotente è abeliano ?" Ricordando che i gruppi abeliani sono $\aleph_0$-categorici se hanno ordine limitato, Baldwin e Saxl [6] posero la seguente congettura:
"Ogni gruppo stabile di ordine limitato è ω-stabile ?".
La risposta a quest'ultima congettura è negativa. (cfr. Baldwin [3]). Non abbiamo ancora una risposta completa alla congettura di Lachlan.
Lachlan dimostrò che se esiste una teoria $\aleph_0$-categorica stabile e non ω-stabile, allora ce n'è una che è uno pseudopiano.
Uno pseudopiano è un insieme di "punti" e "rette" con una relazione di incidenza che gode delle seguenti proprietà:

A-1. L'insieme di punti incidenti a due date rette è sempre finito (eventualmente vuoto).

A-2. L'insieme delle rette incidenti a due date rette è sempre finito.

B-1. Ogni retta è incidente a infiniti punti.

B-2. Ogni punto è incidente a infinite rette.

Zilber [54] ha provato che non esiste uno pseudopiano totalmente categorico.
Poiché Cherlin-Harringhton-Lachlan [13] hanno caratterizzato fra le teorie $\aleph_0$-categoriche, ω-stabili quelle che sono totalmente categoriche e hanno dimostrato che se c'è uno pseudopiano $\aleph_0$-categorico ω-stabile ce n'è uno totalmente categorico, segue che non c'è nessun pseudopiano $\aleph_0$-categorico, ω-stabile.
Per finire questa rassegna sulla categoricità ricordiamo che Morley [33] pose il problema dell'esistenza di teorie $\aleph_1$-categoriche finitamente assiomatizzabili.
Zilber [53] ha dimostrato che le teorie totalmente categoriche non sono finitamente assiomatizzabili. Analogamente Cherlin-Harringhton e Lachlan [13] hanno dimostrato che non lo sono nemmeno le teorie $\aleph_0$-categoriche ed ω-stabili. Peretyat'kin [37] ha però recentemente dato un esempio di teoria $\aleph_1$-categorica completa finitamente assiomatizzabile. Un tale risultato è stato annunciato anche da Morley [35].

^^^^^^^^^^^^^^^^^

TESTI CITATI

1. R.F. ARENS-I.KAPLANSKI. Topological representation of algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948). 457-481.

2. R. BALBES-P.DWINGER. Distributive lattices. University of Missouri Press, Columbia, Missouri (1974).

3. J.T. BALDWIN. Stability theory and algebra. J. Symb. Logic 44 (1979) 599-608.

4. J.T. BALDWIN-A.H. LACHLAN. On strongly minimal sets. J. Symb. Logic 36 (1971) 79-96.

5. J.T. BALDWIN-B. ROSE. $\aleph_0$-categoricity and stability of rings. J. Algebra 45 (1977) 1-16.

6. J.T. BALDWIN-J. SAXL. Logical stability in group theory. J. Austral. Math. Soc. 21 (1976) 267-276.

7. W. BAUR. $\aleph_0$-categorical modules. J. Symb. Logic 40 (1975) 213-220.

8. W. BAUR-G. CHERLIN-A. MACINTYRE. Totally categorical groups and rings. J. Algebra 57 (1979) 407-440.

9. G. CHERLIN. Stable algebraic theories. Logic Colloquium '78, North Holland Amsterdam (1979). 53-74.

10. G. CHERLIN. On $\aleph_0$-categorical nilrings. Alg. Universalis 10 (1980) 27-30.

11. G. CHERLIN. On $\aleph_0$-categorical nilrings II, J. Symb. Logic 45 (1980) 291-301.

12. G. CHERLIN. ω-stable division rings are commutative (in pubblicazione).

13. G. CHERLIN-L. HARRINGHTON-A.H. LACHLAN. $\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable structures (in pubblicazione).

14. G. CHERLIN-J. REINEKE. Categoricity and stability of commutative rings. Ann. Math. Logic 10 (1976) 376-399.

15. G. CHERLIN-J. ROSENSTEIN. On $\aleph_0$-categorical abelian by finite groups. J. Algebra 53 (2978) 188-226.

16. E. ENGELER. A characterization of theories with isomorphic denumerable models. Notices A.M.S. 6 (1959) 161.

17. U. FELGNER. $\aleph_1$-kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe. Fund. Math. 82 (1975) 331-346

18. U. FELGNER. Stability and $\aleph_0$-categoricity of non abelian groups. Logic Colloquim '76 Oxford. North Holland, Amsterdam. (1977) 301-324.

19. U. FELGNER. $\aleph_0$-categorical stable groups. Math. Zeit. 160 (1978) 27-49.

20. A. GRZEGORCZYK. A kind of categoricity. Coll. Math. 9 (1962) 183-187.

21. A. GRZEGORCZYK. On the concept of categoricity. Studia Logica 13 (1962) 39-65.

22. A. GRZEGORCZYK. Logical uniformity by decomposition and categoricity in $\aleph_0$. Bull. Acad. Polonais Sci. Sèr. Sci. Math. Astr. Phys. 16 (1968) 687-692.

23. I. KAPLANSKI. Infinite Abelian groups. University of Michigan Press, Ann Arbor (1954).

24. A.H. LACHLAN. Two conjectures regarding ω-stability of ω-categorical theories. Fund. Math. 81 (1974) 133-145.

25. J. Łoš. On the categoricity in power of elementary deductive systems. Coll. Math. 3 (1954)58-62

26. A. MACINTYRE. On ω_1-categorical theories of abelian groups. Fund. Math. 70 (1970) 253-270.

27. A. MACINTYRE. On ω_1-categorical theories of fields. Fund. Math. 71 (1971) 1-25.

28. A. MACINTYRE-J. ROSENSTEIN. $\aleph_0$-categoricity for rings without nilpotent elements and for Boolean structures. J. Algebra 43 (1976) 129-154.

29. P. MANGANI-A. MARCJA. Shelah-rank for Boolean algebras and some application to elementary theories I. Alg. Universalis 10 (1980) 247-257.

30. P. MANGANI-A. MARCJA. Sulle algebre dei definibili dei modelli di una teoria elementare. Rapp. interno Ist. Mat. "U. Dini" Firenze (1980/81).

31. N.H. Mc COY. Subrings of direct sum. Amer. J. Math. 60 (1938) 374-382.

32. T. MILLAR. Foundations of recursive model theory. Ann. Math. Logic 13 (1978).

33. M. MORLEY. Categoricity in power. Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) 514-538.

34. M. MORLEY. Decidable models. Israel J. Math. 25 (1976) 233-240.

35. M. MORLEY. A finitely axiomatizable complete theory categorical in uncountable power. Abstracts of papers presented to A.M.S. 2 (1981) 485.

36. P. OLJN. Aleph-zero categorical Stone Algebras. J. Austral. Math. Soc. 26 (1978) 337-347.

37. M.G. PERETYAT'KIN. Example of an ω_1-categorical complete finitely axiomatizable theory. Algebra and Logic. 19 (1980) 202-229.

38. A. PILLAY. A class of $\aleph_0$-categorical theories. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. 27 (1981) 411-418.

39. J.G. ROSENSTEIN. $\aleph_0$-categoricity of linear orderings. Fund. Math. 64 (1969) 1-5.

40. J.G. ROSENSTEIN. $\aleph_0$-categoricity of groups. J. of Algebra 25 (1973) 435-467.

41. C. RYLL-NARDZEWSKI. On the categoricity in power $\leq \aleph_0$. Bull. Acad. Polonaise Sc. 7 (1959) 545-548.

42. G. SABBAGH. Aspects logiques de la pureté dans les modules. C.R. Paris A 271 (1970) 909-912.

43. G. SABBAGH. Categoricité et stabilité: quelques exemples parmi les groups et anneaux, C.R. Paris A 280 (1975) 603-606.

44. S. SHELAH. The lazy model-theoreticians guide to stability. Logique et Analyse 71-72 (1975) 241-308.

45. S. SHELAH. Classification theory and the number of non-isomorphic models. North Holland, Amsterdam (1978).

46. L. SVENONIUS. $\aleph_0$-categoricity in first-order predicate calculus. Theoria 25 (1959) 82-94.

47. C. TOFFALORI. Stabilità e categoricità per teorie di anelli. Rapp. Int. Ist. Mat. "U. DIni" Firenze n.10 (1980/81).

48. R. VAUGHT. Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability. Indag. Math. 16 (1954) 467-472.

49. R. VAUGHT. Denumerable models of complete theories, in Infinitistic Methods. Proc. Symp. on Found. of Math. in Warsaw 1959 (1961) 303-321.

50. O. VEBLEN. A system of axioms for geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904) 343-384.

51. J. WASKIEWICZ-B. WEGLORZ. On ω_0-categoricity of powers. Bull. Acad. Polon. Sci. 17 (1969) 195-199.

52. J. WIERZEJEWSKI. On stability and products. Fund. Math. 93 (1976) 81-95.

53. B.I. ZILBER. Rings with $\aleph_1$-categorical theories, Algebra i Logica 13 (1974) 168-187.

54. B.I. ZILBER. Totally categorical tehories: structural properties and the non finite axiomatizability, in Model theory of Algebra and Arithmetic. Lectur Notes in Math. 834 Springer-Verlag, Berlin (1980).