Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ALGEBRA E LOGICA: MOMENTI DI UN RAPPORTO.

Corrado Mangione

E' oggi luogo comune la constatazione che il rapporto fra algebra e logica si sviluppa in entrambi i sensi: esiste un modo algebrico di trattare la logica (l'algebra della logica nei suoi diversi aspetti, oggi di molto differenziati) e sono ben noti a tutti alcuni modi logici di trattare l'algebra (un esempio fra tutti, la teoria dei modelli alla Robinson, per intenderci).

Al di là di questa ovvia constatazione, rimane il problema di indagare le modalità di questo rapporto: quando parliamo di trattazione algebrica della logica, intendiamo semplicemente un modo di affrontare problemi logici attraverso l'algebra, o sosteniamo invece che il modo naturale per formulare e affrontare la problematica logica è direttamente quello algebrico, cosicché la logica non è nient'altro che un settore dell'algebra? All'inverso, la trattazione logica di problemi algebrici è solo un'applicazione, o comporta un modo diverso di concepire l'algebra e i suoi rapporti con il resto della matematica?

Queste domande sono in un certo senso ineludibili, poichè tanto l'algebra quanto la logica si sono poste storicamente come strumento per l'organizzazione con

concettuale della matematica (si pensi solo a Frege o Dedekind da un lato e a Bourbaki e Birkhoff dall'altro). Dal momento che le risposte a questi problemi hanno (e hanno avuto) un peso concreto nell'indicazione di linee di ricerca promettenti, ha senso ripercorrere schematicamente alcune tappe del configurarsi storico di tale rapporto, allo scopo ovviamente di innescare una discussione, più che di dare una mappa esaustiva della vicenda. Si tratta quindi, secondo la caratteristica di queste sedute, di presentare (forse provocatoriamente?) alcuni temi di discussione più che un disegno complessivo . Debbo avvertire che queste note, scritte (ovviamente) dopo le giornate di Siena, riflettono anche alcuni elementi emersi appunto dalla discussione stessa (e i più attenti se ne rendereranno conto senza che io vi faccia esplicito richiamo).

Penso di poter distinguere essenzialmente quattro tappe di questo percorso (e avverto ancora che il linguaggio "tecnico" è volutamente quello oggi usuale, quindi senza quelle attenzioni"storiche"che pur mantenendolo più fedele agli originali avrebbero talora appesantito notevolmente l'esposizione).

1) ALGEBRA E LINGUAGGIO

Qual è il contesto concettuale in cui formulare le leggi della logica e studiarne le mutue dipendenze? La risposta di Boole è che le leggi logiche sono equazioni e la deduzione è una trasformazione di equazioni in un'algebra particolare (l'algebra di Boole appunto). Più in generale i problemi che si pongono a Boole sono due: a) ricerca delle condizioni affinchè esistano soluzioni di tali equazioni,e quindi ricerca delle premesse, e b) elaborazione di metodi di risoluzione (calcolo per ottenere conseguenze). Fuori dell'orizzonte di Boole rimane la questione di che cosa si debba intendere per formalizzazione di una teoria nella sua globalità; la sua analisi logica si può applicare alle dimostrazioni singole, ma non offre uno strumento per studiare le capacità deduttive di una teoria.

Per Frege invece è proprio questo secondo aspetto il punto di partenza. Il requisito di un linguaggio logico è la possibilità di riprodurre uniformemente tutte le possibili dimostrazioni e definizioni. Questo comporta per Frege, diversamente che per Boole, l'impossibilità di un linguaggio puramente equazionale in quanto, mentre per Boole logica delle proposizioni e logica dei termini sono modelli di una stessa struttura algebrica che non possono mai agire simultanea-

mente, per Frege lo scopo stesso di analizzare teorie elementari e d'ordine superiore ne impone un impiego congiunto. I tentativi di Peirce, Schröder, ecc., sulla scia di Boole, di ricorrere a operazioni infinitarie per riprodurre i quantificatori, sono per l'appunto un tentativo di eliminare algebricamente queste difficoltà (tentativo che non riesce comunque a raggiungere la completezza del sistema fregeano).

Avviene così che se da un lato i primi risultati significativi di "teoria della logica" sono quelli (anche se più tardi) di Löwenheim, quindi nel filone dell'algebra della logica, a Frege è possibile fornire un'analisi interna del concetto di dimostrazione e dare per la prima volta esempi concreti di teorie "formalizzate" in senso assiomatico. In termini schematici: se da una parte l'analisi algebrica della logica è più "profonda" di quella fregeana nel senso che pone in rilievo proprietà strutturali unitarie (della logica proposizionale e di quella delle proprietà) dall'altra ha un ambito di applicazione più ristretto che non consente di individuare esattamente il rapporto fra inferenza logica e assunzioni extralogiche .

2) TEORIE E DIMOSTRAZIONI COME OGGETTI MATEMATICI

Dagli anni venti fino al quaranta, si assiste nel nostro settore al fiorire di un numero rilevante di studi e ricerche nel complesso assai diversificate, ma il cui punto centrale e comune, tuttavia, è fedelmente riassumibile in questo, che l'attenzione di sposta dalla logica come contesto in cui studiare la matematica (Frege-Russell) allo studio delle teorie, logiche di diverso ordine incluse, <u>come oggetti matematici</u>. Il primo passo decisivo in questo senso è compiuto da Hilbert con la frantumazione della "grande logica", cui seguono da una parte i lavori di Post e di Hilbert e della sua scuola e dall'altra quelli della scuola polacca con Łukasiewicz, Lindenbaum e Tarski in primo piano.

La distinzione più vistosa tra questi due indirizzi si può individuare nella diversità di metodi che è consentito usare: da un lato il finitismo che determina in modo assai rigido (non per questo preciso) il metodo di studio (teoria riduttiva della dimostrazione) dall'altro l'uso del tutto libero di metodi infinitari (leggi: insiemistici) della scuola polacca.

Sullo sfondo due eventi significativi che coinvolgono l'intera matematica: il costituirsi dell'algebra astratta nella sfera - se non nella scuola - di Hilbert, con

l'apporto fondamentale di Emmy Noetner, Artin e quindi van der Waerden; lo sviluppo, dal corpo della teoria degli insiemi, di teoria della misura, analisi funzionale, topologia, ecc., uno dei cui poli è appunto l'ambiente polacco.
La matematica della scuola polacca si configura come metodologia generale in cui teorie logiche, interpretazioni, ecc., sono oggetti insiemistici come campi, spazi topologici, ecc.. La metodologia delle scienze deduttive - in senso tarskiano - affronta i problemi logici tradizionali della dimostrabilità e della definibilità utilizzando metodi insiemistici generali che sono del tutto paralleli a quelli usati in altre branche della matematica. In alcuni casi, con l'introduzione dell'algebrizzazione della logica (Lindenbaum in particolare) certi teoremi logici divengono casi particolari di teoremi generali sulle algebre di Boole e spazi topologici. Ma la problematica logica rimane essenzialmente quella tradizionale: nuovi sono i metodi di concettualizzazione di nozioni classiche, prime fra tutte quelle di verità, conseguenza e definibilità, come pure nuova è la consapevolezza della loro generalità. Ovviamente nuovi concetti vengono introdotti ma, per così dire, come pura "traduzione" di concetti matematici più generali. Il tentativo di analizzare dal punto di vista logico i nuovi metodi algebrici e topologici resta estraneo all' orizzonte della

scuola tarskiana, salvo per casi isolati, anche se assai significativi, come ad esempio il calcolo dei sistemi o la citata analisi del concetto di definibilità nei suoi collegamenti con la teoria descrittiva degli insiemi. Testimonianza di questa concezione sostanzialmente tradizionale della problematica logica è la limitazione a linguaggi numerabili e la restrizione conseguente di teoremi di portata molto più generale a questo caso; tale restrizione, si badi bene, non cadrà neppure quando Tarski allargherà la sua prospettiva negli anni cinquanta, con la teoria dei modelli (equivalenza elementare, classi elementari, ecc.) collegandosi con le problematiche di algebra universale aperte dai lavori di Birkhoff.
Problemi logici nuovi - e non solo con nuovi metodi - affronta invece la metamatematica hilbertiana per la quale si verifica una situazione in certo senso duale a quella della scuola polacca. I metodi della teoria hilbertiana della dimostrazione sono difficilmente assimilabili a quelli della matematica generale astratta che si va affermando, e la loro generalità potenziale è spesso nascosta dalle limitazioni finitiste. Ma i problemi, questioni di decisione, dimostrazioni costruttive di esempi,ecc., aprono una tematica profonda, al di là delle questioni fondazionali, nell'analisi della matematica corrente. Questa

problematica la ritroviamo nell'algebra e nella geometria algebrica dell'ambiente di Gottinga, in cui in parallelo si sviluppa l'approccio astratto (di tradizione dedekindiana) e l'approccio costruttivo (di tradizione kroneckeriana) assieme all'indagine dei loro rapporti. Una spia di questa tensione si ritrova nella Moderne Algebra di van der Waerden, nei lavori della Hermann (proseguiti poi da Seidenberg [1]) e di H. Weyl e nella teoria degli ideali. Insomma a mio parere non è azzardato avanzare l'ipotesi che nell'ambiente di Gottinga esistesse una tensione di reciproca influenza fra la nascente algebra astratta e l'altrettanto nascente discorso metamatematico.

I risultati di Gödel sulla completezza elementare e sull'incompletezza dell'aritmetica danno in un certo senso una prima misura dello scarto tra metodi astratti e combinatori, ponendo in luce da una parte come sia possibile entro limiti determinati un'analisi combinatoria della relazione astratta di conseguenza e come per converso una riduzione totale sia impossibile ad esempio nel caso dell'aritmetica. Un'esempio parallelo estremamente significativo è quello di Skolem, con le sue approssimazioni al teorema di completezza, in cui aveva dato un'analisi raffinatissima dell'intergioco fra elementi puramente combinatori e infinitari.

In questa prospettiva la metodologia delle scienze deduttive di Tarski costituisce una consapevole alternativa al discorso hilbertiano, in cui la dimensione semantica si pone come versante astratto di quella sintattica, dotata di un'autonomia propria.

3) LA METAMATEMATICA COME CONTESTO DELL'ALGEBRA ASTRATTA.

Nella metodologia di Tarski il contesto concettuale è pur sempre costituito da algebra e topologia (con sullo sfondo la teoria degli insiemi). A partire dai lavori di Malcev (fine anni trenta) e di Robinson (fine anni quaranta) la situazione in certo senso si ribalta e per la prima volta - parallelamente a quanto Hilbert aveva fatto per le componenti combinatorie - è la logica, in particolare la teoria dei modelli, che si presenta come contesto generale in cui formulare e analizzare principi matematici, più specificamente algebrici. In altre parole, il livello di generalità adeguato viene individuato in concetti metamatematici nuovi o nuovamente interpretati. Principi locali, la nozione di polinomio, varie forme di completezza per i campi, ecc. risultano naturalmente accessibili non solo sul piano tecnico ma su

quello dell'analisi concettuale, in termini dell'interrelazione fra teorie e strutture: la teoria dei modelli si presenta come contesto in cui catturare all'origine questa polarità fra condizioni e oggetti che le soddisfano. In Robinson in particolare è esplicita la consapevolezza che come questa polarità è il cuore della geometria algebrica (equazioni-luoghi di punti) così la sua portata è molto più generale e in questa generalità va analizzata. Anelli, ideali, che in van der Waerden erano considerati la tecnica per algebrizzare la geometria vengono riconsiderati in quest'ottica.

La coscienza di questi mutamenti di prospettiva è esplicita: nel 1941, a proposito del principio di localizzazione, Malcev afferma quanto segue:

> In algebra e specialmente in teoria dei gruppi ci sono molti teoremi della forma: se una certa proprietà C vale per tutte le sottoalgebre finitamente generate di un'algebra data (gruppo, anello, ecc.) allora C vale per l'intera algebra. Scopo della presente nota è mostrare che tali proposizioni non sono specificamente algebriche nella maggioranza dei casi e che possono essere ottenute come conseguenza immediata di una proposizione generale della logica matematica. Questo approccio generale a teoremi locali non dà ovviamente la soluzione a ogni difficile problema algebrico. In molti casi tuttavia rende ridondanti dimostrazioni algebriche di questi teoremi e talora permette di vedere immediatamente che un teorema vale sotto assunzioni in qualche modo più ampie ... [2,p.15] .

A proposito di questo discorso di Malcev - che tra l'altro si serve appunto dell'espediente di considerare

linguaggi di cardinalità qualsiasi - Bozzi [3] osserva che, nella prospettiva tarskiana,

> ... l'idea di Malcev di estendere la compattezza a linguaggi più che numerabili, a parte ogni questione di legittimità di simile estensione, risultava del tutto priva di giustificazione. E' questo fatto che, per contrasto, mostra chiaramente come dietro all'estensione compiuta da Malcev fosse operante un modo tutto nuovo di concepire i linguaggi formali. Al fondo dell'atteggiamento di quest'ultimo stava infatti un'idea nuova, quella di utilizzare l'apparato della logica del primo ordine per dare forma esplicita allo schema dimostrativo comune a numerose dimostrazioni algebriche riguardanti i cosiddetti teoremi locali... (p.274).

In altri termini, sempre secondo Bozzi,

> ...partendo dall'esigenza puramente algebrica di dare forma esplicita alla struttura comune di dimostrazioni diverse si giunge... ad una visione nuova del concetto stesso di apparato logico ed all'emergere di un concetto matematico sino ad allora non considerato nella sua generalità: quello di linguaggio elementare. Questa nozione infatti ha scarso peso come si è sopra accennato nei classici lavori tarskiani del '30-'35 e ciò per ragioni inerenti alla stessa idea di semantica che in questi lavori veniva presentata (p. 277).

Ancora più articolata è la posizione di Robinson, che ad esempio in [4] afferma:

> All'inizio di questa conferenza ho ricordato il collegamento naturale fra teoria dei modelli e algebra [aveva dichiarato di usare metodi logici di cui l'algebra costituisce il più naturale campo di applicazione] . Ho quindi discusso l'opera di Malcev che dipende da un'applicazione diretta di (ciò che ora è chiamata) teoria dei modelli a una concreta situazione algebrica. Da allora sono state fatte numerose applicazioni di questo tipo. Tuttavia ci sono un gran numero si questioni concernenti l'algebra che per loro natura vanno al di là degli schemi classici e debbono

essere inserite in una metateoria. Di questo tipo è il problema di portare ad unificazione le differenti nozioni che portano alla formazione di strutture quozienti (sottogruppi normali, ideali) e ciò può essere infatti affrontato attraverso la teoria dei modelli. Un'altro problema di questo tipo è come riportare sotto un unico capitolo le nozioni di campo algebricamente chiuso e di campo reale chiuso, che sono intuitivamente analoghe... (p.76).

La teoria dei modelli come concepita da Robinson, assieme ai tentativi suoi (e di alcuni suoi allievi) di trovare una nozione di effettivo adeguata ai contenuti algebrici, riunisce in sè gli aspetti più rivoluzionari, dal punto di vista dei rapporti con l'algebra, della matematica hilbertiana (con sullo sfondo il problema di Kronecker) e della metodologia tarskiana. I concetti di model completeness e la successica teoria del forcing generalizzato come tentativo di fornire un contesto per la nozione di algebricamente chiuso, la teoria metamatematica degli ideali come teoria dei quozienti, la nozione di polinomio matematico, sono alcuni esempi di una prospettiva in cui la logica cerca di individuare nell'algebra (e nella geometria) nozioni e metodi generali indagandone il ruolo nell'analisi della matematica. Non si tratta di semplici "applicazioni", ma di un tentativo di cogliere l'algebra in una nuova prospettiva, nel suo aspetto di logica della matematica.

La teoria dei modelli nel senso di Robinson, anche se

tecnicamente ha costanti relazioni con quella usata nel programma di Tarski, ha obiettivi essenzialmente diversi. Una distinzione per così dire formale, enunciata da Keisler [5] e ampiamente diffusa suona:

la western model theory è nella tradizione di Skolem e Tarski. E' largamente motivata da problemi in teoria dei numeri, Analisi, teoria degli insiemi. Pone al centro dell'attenzione l'insieme di tutte le formule della logica del primo ordine,

mentre viceversa la cosidetta "eastern model theory"

è nella tradizione di Malcev e Robinson. E' motivata da problemi di algebra astratta, dove le teorie usuali hanno al più due blocchi di quantificatori. Pone al centro dell'attenzione l'insieme delle formule senza quantificatori e l'insieme delle formule esistenziali (p.48).

Ma come sottolineato da Macintyre [6] la differenza sostanziale sta più nei programmi che non negli oggetti della ricerca, dal momento che la teoria dei modelli

... prende costruzione della matematica, le generalizza e dà come prodotto di ritorno applicazioni matematiche

con lo scopo principale, che Macintyre attribuisce esplicitamente a Robinson ,"di generalizzare concetti relativi ad algebrico". Mi sembra particolarmente significativo (e"onesto") il discorso di Macintyre in questo senso, quando afferma di volersi dedicare, nel

prosieguo del lavoro sopra citato,

> ... a sbrogliare quell'intrico di nozioni che inviluppano algebrico. Io non affermo - prosegue - che un risultato di teoria dei modelli non è interessante se non proviene da questa spiegazione, ma da qui provengono i risultati che esercitano il maggior fascino su di me (p.52).

4) LOGICA DELLA MATEMATICA E TEORIA DELLE CATEGORIE.

Vedendo la teoria dei modelli come contesto per l'algebra, Robinson pensava essenzialmente all'algebra astratta classica della Noether & Co. Lo sviluppo della geometria e dell'algebra omologica, col tentativo di Grothendieck di vedere la teoria delle categorie come strumento per analizzare più profondamente la geometria algebrica, ha portato negli ultimi anni a una situazione nuova.

E' soprattutto a Lawvere che si deve la consapevolezza e l'elaborazione di un programma secondo il quale la teoria delle categorie viene usata come contesto adeguato per analizzare la logica della matematica ed in cui la stessa teoria dei modelli deve confluire.

Alla base di questa prospettiva stanno almeno due fatti. In primo luogo la possibilità, attraverso la funtorializzazione dell'algebra universale prima e della teoria dei modelli poi, di fornire finalmente un'analisi algebrica

non ad hoc della logica elementare e di ordine superiore, analisi che pone in luce nettamente analogie profonde fra logica ed altri campi della matematica. In secondo luogo la teoria delle categorie permette, via la nozione di topos, un ampliamento delle nozioni di universo di interpretazione rispetto alla teoria degli insiemi che fa da sfondo alla teoria dei modelli classica.

Il problema da indagare è quello della portata di questa nuova generalità ed è dai risultati di questa analisi che dipende l'instaurarsi di nuovi rapporti fra logica e algebra: si tratta cioè di una generalità estrinseca di metodi o invece di una generalità intrinseca che coglie livelli più profondi del pensiero matematico?

BIBLIOGRAFIA (ULTRA) ESSENZIALE

1 SEIDENBERG,A.,Constructions in Algebra, in Transactions American Mathematical Society 197,(1974),pp.273-313. In questo articolo si trova il riferimento al lavoro di G. Hermann, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, (Math.Ann. 95, (1926),pp.736-788) cui si accenna nel testo.

2 MALCEV,A., A general mothod for obtaining local theorems in group theory, in The Metamathematics of algebraic Sustems, North Holland, (1971),pp.15-21.

3 BOZZI,S., Alcune osservazioni storiche sui rapporti fra semantica e teoria dei modelli, in Atti del Convegno di storia della logica, Liviana, (1974), pp. 269-283.

4 ROBINSON,A., Recent Developments in Model Theory, in Logic, Methodology and Philosophy of science (1), Stanford U.P.,(1962),pp.60-79.

5 KEISLER,H.J.,Foundamentals of Model Theory, in Barwise, J.(ed.), Handbook of mathematical logic, N.H., (1977),pp.47-104.

6 MACINTYRE,A., Model Theory, in Agazzi, E. (ed), Modern Logic. A Survey, Reidel (1981),pp. 45-65.