Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

DOTTRINE ELEMENTARI-ESISTENZIALI REGOLARI

CLAUDIO BERTA GIANCARLO MELONI

Data la categoria $\mathbb{R}$ delle categorie regolari e la categoria $\mathbb{D}$ delle dottrine elementari-esistenziali, dove le categorie di attributi sono ridotte a preordini, esistono due funtori

$$\mathbb{R} \underset{\rho}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}$$

tali che ρ associa alla dottrina $\mathcal{D}$ la categoria regolare $\rho\mathcal{D}$ i cui oggetti sono le coppie ordinate $[X,A]$ di tipi e attributi di quei tipi in $\mathcal{D}$, mentre le frecce sono gli attributi dimostrabilmente funzionali, uguagliate a meno della relazione di reciproca dimostrabilità; il funtore δ associa alla categoria regolare $\mathcal{R}$ la dottrina $\delta\mathcal{R}$, la cui categoria dei tipi è $\mathcal{R}$ stessa, mentre gli attributi di un certo tipo X sono i sottoggetti di X.

I seguenti risultati sono noti.
Le categorie $\mathcal{R}$ e $\rho(\delta\mathcal{R})$ sono equivalenti.
$\mathbb{R} \xrightarrow{\rho\circ\delta} \rho(\delta\mathbb{R})$ è un'equivalenza di bicategorie (dove con "equivalenza di bicategorie" s'intende che $\rho\circ\delta$ è pieno e fedele e ogni oggetto di $\rho(\delta\mathbb{R})$ è equivalente - anzichè isomorfo, come richiesto dalla definizione di equivalenza di categorie - ad almeno un oggetto di $\mathbb{R}$ trasformato tramite $\rho\circ\delta$).
Il funtore ρ è l'aggiunto sinistro di δ.
$\delta\mathbb{R}$ è una sottocategoria piena e riflessiva di $\mathbb{D}$.

Si pone il problema - sia dal punto di vista categoriale, che rispetto alla questione dell'analisi concettuale della logica elementare-esistenziale - di chiarire il rapporto tra la bicategoria delle categorie regolari e quella delle dottrine.

DEFINIZIONE Si dice che nella dottrina $\mathcal{D}$ vale lo schema di comprensione se per ogni $Y \in |T|$ (T è la categoria dei tipi di $\mathcal{D}$), il funtore $T_Y \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \exists_f(v_X) \leq \exists_g(v_W)$$

ha aggiunto destro.
(Con $\mathcal{Q}(Y)$ si denota l'inf - 1 - semireticolo degli attributi di tipo Y).
Quindi, per $X \xrightarrow{f} Y \in T/Y$ e $B \in \mathcal{Q}(Y)$ qualsiasi,

$$\frac{\exists_f(v_X) \leq B}{\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![B]\!] \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_B} & \\ & Y & \end{array}} \quad (sse)$$

(per brevità scriveremo anche $\mathbb{B} \xrightarrow{p} Y$ invece di $[\![B]\!] \xrightarrow{p_B} Y$).
La counità dell'aggiunzione dà $\exists_{p_B}(v_{\mathbb{B}}) \leq B$.
Si hanno i seguenti risultati.

La freccia $[\![B]\!] \xrightarrow{p_B} Y$ è mono; $[\![v_Y]\!] \xrightarrow{p} Y$ è un isomorfismo; $[\![B]\!] \simeq [\![\exists_{p_B}(v_{\mathbb{B}})]\!]$; il funtore di comprensione è fedele.

DEFINIZIONE Si dice che una dottrina $\mathcal{D}$ soddisfa le condizioni di regolarità - più semplicemente, è regolare - quando:

(i) vale lo schema di comprensione;
(ii) per $X \xrightarrow{\langle f,g \rangle} Y \times Y$ qualsiasi,

$$v_X \leq \langle f,g \rangle^{-1}(=_Y) \implies f = g$$

(con $(=_Y)$ si denota l'attributo $\exists_{\langle 1_Y, 1_Y \rangle}(v_Y)$ di tipo $Y \times Y$);
(iii) il funtore di comprensione è pieno;
(iv) ogni freccia del tipo di e nel diagramma qui sotto è estremale

$$\frac{\exists_f(v_X) \leq \exists_f(v_X)}{\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & [\![\exists_f(v_X)]\!] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y & \end{array}}$$

Il punto (ii) pone la condizione che per i termini l'uguale e il dimostrabilmente uguale coincidano (si ha, banalmente, che $f = g \Rightarrow \langle f,g \rangle^{-1}(=_Y)$); ciò è indipendente da (i), infatti una dottrina per cui ogni tipo ha un unico attributo, generalmente è elementare-esistenziale, in essa vale lo schema di comprensione, ma non (ii).

Valgono allora le seguenti proprietà.

Se $\mathcal{D}$ soddisfa (i) e (ii), T ha limiti sinistri finiti.

Una dottrina con schema di comprensione soddisfa (iii) sse per ogni attributo A di tipo X qualsiasi, $A \leq \exists_{p_A}(v_{\mathbb{A}})$.

Se $\mathcal{D}$ soddisfa (i) e (iv), allora $X \xrightarrow{f} Y$ è estremale sse $[\![\exists_f(v_Y)]\!] \simeq Y$.

Se $\mathcal{D}$ soddisfa (i), (iii) e (iv), f è estremale sse $v_Y \leq \exists_f(v_X)$.

Il passo fondamentale nella dimostrazione dell'equivalenza tra $\mathcal{D}$ e $\delta(\rho\mathcal{D})$, per $\mathcal{D}$ dottrina regolare, consiste nel dimostrare le due seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE Se $\mathcal{D}$ soddisfa le condizioni di regolarità, la sua categoria dei tipi T è regolare.

PROPOSIZIONE Se $\mathcal{D}$ soddisfa le condizioni di regolarità, A e B sono attributi qualsiasi rispettivamente di tipo X e Y , F è un attributo funzionale di tipo $X \times Y$ da A a B , allora $[\![F]\!] \xrightarrow{p_F} X \times Y$ è una relazione funzionale nella categoria regolare T (una freccia di $\rho[\delta T]$) da $[\![A]\!] \xrightarrow{p_A} X$ a $[\![B]\!] \xrightarrow{p_B} Y$.

Perchè sia definibile il concetto di equivalenza di dottrine è necessario specificare cosa s'intende per trasformazione naturale tra morfismi di dottrine.

DEFINIZIONE Una trasformazione naturale tra i morfismi di dottrine

$$\mathcal{D}_1 \underset{\mu'}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}_2$$

è una trasformazione naturale τ tra μ_{T_1} e μ'_{T_2} (le componenti di μ e μ' sulle categorie dei tipi), tale che per ogni $A \in \mathcal{Q}(X)$ con $X \in |T_1|$ qualsiasi, $\mu_X(A) \leq \tau_X^{-1}[\mu'_X(A)]$.

$$\begin{array}{ccc} \mu_X(A) & & \mu'_X(A) \\ | & & | \\ \mu_{T_1}(X) & \xrightarrow{\tau_X} & \mu'_{T_2}(X) \end{array}$$

Quindi, si ha

PROPOSIZIONE Se $\mathcal{D}$ soddisfa la condizioni di regolarità,

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{D}}} \delta(\rho\mathcal{D})$$

definito come segue è un'equivalenza di dottrine.
Rispetto alle categorie dei tipi,

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \overset{\eta_T}{\rightsquigarrow} \quad [X, v_X] \xrightarrow{\exists_{\langle X,f \rangle}(v_X)} [Y, v_Y] \quad ;$$

rispetto agli attributi,

$$a(X) \ni A \quad \overset{\eta_X}{\rightsquigarrow} \quad [X,A] \xrightarrow{\exists_{\langle 1,X\rangle} A} [X, v_X]$$

(gli $\eta_{\mathcal{D}}$ sono le componenti di una trasformazione naturale $\eta : I_{\mathbb{D}} \longrightarrow \delta\circ\rho$, che è l'unità dell'aggiunzione tra ρ e δ).

L'altro morfismo,parte dell'equivalenza, è

$$\delta(\rho\mathcal{D}) \xrightarrow{\theta_{\mathcal{D}}} \mathcal{D}$$

definito sui tipi da

$$[X,A] \xrightarrow{F} [Y,B] \quad \overset{\theta_{(\rho\mathcal{D})}}{\rightsquigarrow} \quad [\![A]\!] \xrightarrow{f} [\![B]\!]$$

dove f è la freccia associata canonicamente alla relazione funzionale $[\![F]\!] \xrightarrow{p_F} X\times Y$ nella categoria regolare $\mathcal{T}$;

sugli attributi,

$$[W,D] \xrightarrow{M} [X,A] \quad \overset{\theta_{[X,A]}}{\rightsquigarrow} \quad \exists_m (v_D)$$

dove m è la freccia associata in $\mathcal{T}$ alla relazione funzionale $[\![M]\!] \xrightarrow{p_M} W\times X$.

PROPOSIZIONE Se $\mathbb{D}_\sim$ è la bicategoria delle dottrine regolari,

$$\mathbb{D}_\sim \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$$

è un'equivalenza di bicategorie.

In un certo senso si può dire che le dottrine regolari sono la soluzione della contraddizione per cui, se da una parte le categorie regolari sono la concettualizzazione della logica elementare-esistenziale, dall'altra la pratica matematica fa uso conveniente delle proprietà delle dottrine ad esse associate.

Inoltre si ha

PROPOSIZIONE Se $\mathcal{D}_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{D}_2$ è un'equivalenza di dottrine e $\mathcal{D}_{1(2)}$ è regolare, allora anche $\mathcal{D}_{2(1)}$ è regolare.

PROPOSIZIONE Per ogni categoria regolare $\mathcal{R}$, $\delta\mathcal{R}$ è una dottrina regolare.

PROPOSIZIONE Una dottrina elementare-esistenziale $\mathcal{D}$ è equivalente a $\delta(\rho\mathcal{D})$ sse è regolare.

BIBLIOGRAFIA

DIONNE J., Des theories elementaries aux categories conceptueles, These de maitrise, Univ. de Montreal, 1973.

LAWVERE F.W., Equality in hyperdoctrines and the comprehension schema as an adjoint functor, Proc. of the A.M.S., Symp. Pure Math. 17, Providence, 1970.

REYES G.E., From sheaves to logic, M.A.A. Studies in Math. vol IX, pp. 143 - 204, 1974.