Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

TEORIA DEI MODELLI E LOGICA MODALE

GIANGIACOMO GERLA (Napoli)

L'individuazione di logiche che, pur permettendo un adeguato sviluppo della relativa teoria dei modelli, abbiano una potenza espressiva maggiore di quella della logica classica del primo ordine Λ è forse uno dei principali compiti che si pone l'attuale ricerca in teoria dei modelli. Nell'ambito di tale problematica in [3] si definisce una logica modale del primo ordine in cui $\Diamond A$ viene interpretato come possibilità di ottenere una estensione del modello dato in cui A sia vera. Allora tutti quei concetti di teoria dei modelli (quali l'essere algebricamente chiuso, l'essere esistenzialmente completo, la model-completezza, il forcing infinito ecc.) che si definiscono facendo riferimento alle estensioni di un dato modello, sono esprimibili nella logica modale Λ' così definita. Come è noto tali concetti non sono esprimibili in Λ .

Più precisamente, detto L un linguaggio del primo ordine, chiamiamo E-struttura modale una coppia costituita da una famiglia $(M_w)_{w \in W}$ di modelli di L e da una relazione R in W binaria, transitiva e riflessiva. Si suppone inoltre che se wRw' allora $M_{w'}$ è una estensione di M_w. Detta L' l'estensione modale di L, la valutazione delle formule di L' è definita al solito modo. Di particolare interesse sono le E-strutture indi viduate dalla classe C_T dei modelli di una data teoria T di L e dalla relazione "essere sottomodello". In tale caso se M è un modello di T $C_T, M \models \Diamond A$ equivale ad affermare l'esistenza di una estensione di M in cui A è vera. Ne segue, ad esempio, che un modello di T è esistenzialmente completo se e solo se $C_T, M \models \Diamond A \rightarrow A$ per ogni formula A di L esistenziale. Similmente si prova che T è model-completa se e solo se in C_T è valida $A \leftrightarrow \Box A$ per ogni formula A di L e che ciò avviene se e solo se $A \leftrightarrow \Box A$ è valida per ogni formula di L'. In altri termini T è model completa e e solo se il sistema modale delle formule valide in C_T tracolla.

Per poter esprimere il forcing infinito si definisce la funzione φ per induzione ponendo $\varphi A = A$ se A è atomica ed inoltre $\varphi(B \wedge C) = \varphi B \wedge \varphi C$, $\varphi(B \vee C) = \varphi B \vee \varphi C$, $\varphi(\exists x_i B) = \exists x_i \varphi B$, $\varphi(\neg B) = \Box(\neg \varphi B)$. Si prova allora che M forza infinitamente la formula A di L (rispetto alla teoria T) se e solo se $C_T, M \models \varphi A$. Da ciò segue che M è infinitamente generico se e solo se per ogni formula A di L $C_T, M \models A \leftrightarrow \varphi A$.

In [3] si prova anche un teorema di completezza e di compattezza per la logica proposta. E' possibile inoltre provare che: a) Λ' pur essendo assiomatizzabile non ammette un sistema di assiomi che permetta la deduzione da ipotesi; b) è possibile l'eliminazione dei quantificatori per Λ' quando L è il linguaggio puro con identità; c) Λ' non è confrontabile con le note estensioni infinitarie di Λ.

Tra le questioni aperte vi è il problema della confrontabilità di frammenti di Λ' con frammenti delle estensioni infinitarie di Λ. Risultati in tale senso sarebbero interessanti in quanto dalla esprimibilità, facilmente intuibile e verificabile, di molti concetti di teoria dei modelli in Λ', si potrebbe risalire alla più complessa questione della esprimibilità nelle logiche infinitarie.

Interessante sarebbe anche chiarire il rapporto tra Λ', la logica intuizionista ed il forcing finito ed infinito. Ciò anche in connessione a problemi di indipendenza in teoria degli insiemi. Relativamente a tali questioni si veda anche [1] e [2].

BILBIOGRAFIA

[1] M.Fitting, Non-classical logics and the independence results of set theory. Theoria 38, (1972), pp. 133-142.

[2] M.Fitting, Intuitionistic logic model theory and forcing, North-Holland, Amsterdam (1962).

[3] G.Gerla-V.Vaccaro, Applicazioni della logica modale alla teoria dei modelli. Dattiloscritto.