Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

SUL NULLSTELLENSATZ DI HILBERT IN ALGEBRA UNIVERSALE

PAOLO LIPPARINI

La usuale dimostrazione dell'equivalenza tra la forma forte e quella debole del nullstellensatz di Hilbert può essere generalizzata nell'ambito dell'algebra universale, usando un concetto di 'non generatore' simile a quello noto in teoria dei gruppi.

In questa maniera, non solo si semplificano e si rendono più chiare alcune dimostrazioni di algebra commutativa, ma si ottiene per altra via un risultato di Bacsich sulle strutture algebricamente chiuse.

Probabilmente queste idee possono essere sviluppate almeno in due direzioni, cioè sia generalizzando i concetti fondamentali della geometria algebrica classica — anche in relazione ai recenti studi sulla geometria algebrica reale —, sia analizzando le somiglianze fra la teoria di Jacobson per gli anelli e le proprietà del sottogruppo di Frattini.

Ma, anche se queste linee di ricerca non portassero a risultati utili, o fossero troppo difficili per essere praticate, ritengo ugualmente di aver dato un buon esempio del fatto che esistono ancora molti metodi, usati per lo più da studiosi di gruppi od anelli, che, all'apparenza tecnici e particolari, sono in realtà molto generali e possono essere applicati utilmente in algebra universale.

Tutte le strutture che considero apparterranno a una varietà fissata, anche se, complicando un po' le definizioni, la maggior parte dei risultati si possono estendere a classi elementari e chiuse per sottostrutture.

Se A è un'algebra, $x \in A \times A$ è un <u>non generatore</u> sse per ogni congruenza Θ :

$$\langle x, \Theta \rangle = 1 \quad \text{implica} \quad \Theta = 1 ,$$

dove $\langle\ \rangle$ sta per 'la congruenza generata da...'.

Dico che una congruenza θ di A è un <u>punto</u> sse A/θ può essere estesa a una struttura semplice (nel caso degli anelli un punto è un ideale primo, cioè un punto di Spec(A)).

Il <u>radicale</u> di una congruenza ψ, $\sqrt{\psi}$, è l'intersezione dei punti che la contengono; il <u>nilradicale</u> di A è l'intersezione di tutti i punti di A.

Se $A[\bar{x}] = A[x_1,\ldots,x_n]$ indica la struttura libera generata da A e da n nuovi elementi, e se $X \subseteq (A[\bar{x}])^2$, si può definire:

$$V(X) = V(\langle X\rangle) = \left\{ \bar{a} \in A^n \mid (P(\bar{x}),Q(\bar{x})) \in X \text{ implica } P(\bar{a})=Q(\bar{a}) \right\};$$

e se $Y \subseteq A^n$ si definisce:

$$I(Y) = \left\{ (P,Q) \mid \text{per ogni } \bar{a} \in Y,\ P(\bar{a}) = Q(\bar{a}) \right\}.$$

(L'analogo in teoria degli anelli di queste definizioni sono 'varietà' e 'ideale associato a un sottoinsieme di A^n', solo che nel caso generale conviene usare le congruenze al posto degli ideali)

La forma debole del Nullstellensatz si può esprimere con: per ogni congruenza di $A[\bar{x}]$, per ogni n
$V(\theta) = \emptyset$ implica $\theta = 1$;
mentre la forma forte dice che, per ogni θ:
$\sqrt{\theta} \supseteq I(V(\theta))$.

Usando la compattezza, e l'analogo di un teorema sul sottogruppo di Frattini si può dimostrare:

TEOREMA : La forma debole del Nullstellensatz implica quella forte.

Per strutture semplici si può far vedere che la forma debole equivale all'essere algebricamente chiuso, e la forte all'essere esistenzialmente chiuso, da cui si ottiene:

TEOREMA (Bacsich) : In una varietà in cui ogni struttura può essere estesa a una semplice, algebricamente chiuso e esistenzialmente chiuso sono concetti coincidenti (se non si considera la struttura con un solo elemento).