Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

IL TEOREMA DI SOLOVAY E L'ARITMETICA DI HEYTING

Franco Montagna

Come è noto, il Teorema di Solovay afferma che, se $f(x_1 \ldots x_n)$ è un polinomio nel linguaggio delle algebre diagonalizzabili DA tale che l'equazione $f(x_1 \ldots x_n) = 1$ non sia deducibile dalle identità di DA, esiste una sequenza $A_1^f \ldots A_n^f$ di proposizioni dell'Aritmetica di Peano PA tale che, nell'algebra diagonalizzabile di PA, $f([A_1^f] \ldots [A_n^f]) \neq 1$ ($[A_i^f] \overset{\text{def.}}{=}$ classe di equivalenza di A_i^f modulo la dimostrabile equivalenza in PA).

Il Teorema di Solovay costituisce una generalizzazione molto forte dei Teoremi di Incompletezza di Gödel: come il Primo Teorema di Gödel, fornisce un metodo per produrre formule indecidibili (si prenda $f : f \neq 0$, $f \neq 1$ in DA), e come il Secondo Teorema ci dice che fra le formule indecidibili ve ne sono alcune che coinvolgono il predicato di dimostrabilità. Anche per questi motivi, sarebbe utile dimostrare un analogo del Teorema di Solovay per l'Aritmetica di Heyting HA. L'approccio più immediato a tale problema consiste nello studiare la varietà IDA ottenuta sostituendo in DA le identità booleane con quelle delle algebre di Heyting. L'algebra associata ad HA è una

IDA, e questo fatto ha incoraggiato alcuni autori a studiare tale varietà. Buoni risultati sulla IDA sono stati ottenuti da A. Ursini (4), (5) e da G. Sambin (2). Tuttavia, le identità valide nella IDA di HA sono di più di quelle delle IDA. Esempi di identità valide nelle IDA di HA ma non in tutte le IDA sono $\tau(x + y) \leq \tau(\tau x + \tau y)$ (Leivant), e $\tau(\neg\neg\tau x \to \tau x) \to \tau\tau x$ (Visser). Uno dei motivi per cui succede questo è che in HA sono valide regole non valide classicamente; aritmetizzando tali regole si ottengono proprietà del predicato di dimostrabilità per HA che non sono deducibili dalle identità di IDA. Invece di continuare su questa strada può essere interessante fare un passo indietro, e chiedere: perchè la dimostrazione di Solovay non funziona per HA? Un'analisi di tale dimostrazione rivela che l'unico punto in cui si utilizza un ragionamento intuizionisticamente inaccettabile è il seguente: dato $f(x_1 \dots x_n)$ non identicamente uguale ad 1 in DA, Solovay costruisce una DA finita $\mathfrak{J}$ in cui $f(x_1 \dots x_n)$ non è identicamente uguale ad 1; lo spazio duale di $\mathfrak{J}$ è un albero finito $\langle T, \langle \rangle$ munito della topologia discreta. Solovay introduce poi una h totale ricorsiva da N a T tale che $\forall x \;\; h x \preccurlyeq h(x + 1)$, e utilizza

il fatto che $\vdash_{PA}$ "h è costante da un certo n in poi". Questo fatto è dimostrabile classicamente (essendo T finito e h non decrescente, i valori di h , se non si fermano prima, si devono necessariamente stabilizzare una volta raggiunta una foglia) ma non intuizionisticamente, in quanto non possiamo decidere su quale punto dell'albero i valori di h si fermano.

Per ripetere la dimostrazione di Solovay dovremmo aggiungere, per ogni n, t l'assioma "se t codifica un albero finito $\langle T, \langle \rangle$ e n codifica una funzione totale ricorsiva da N a T non decrescente rispetto a $\langle$, tale funzione è costante da un certo n in poi". Questo schema, però, non solo non è dimostrabile in HA, ma è equivalente allo schema $A \vee \neg A$: $A \in \Sigma_1$. Aggiungere tale schema significherebbe andare contro lo spirito di HA, in quanto ciò comporterebbe ad esempio l'aggiunta dell'assioma $Teor_{HA}\; \overline{\bar{0} = \bar{1}} \vee \neg\, Teor_{HA}\; \overline{\bar{0} = \bar{1}}$, mentre $Teor_{HA}\; \overline{\bar{0} = \bar{1}}$ è una delle più importanti formule indecidibili di HA.

Concludiamo con una lista di problemi aperti.

1) Caratterizzare l'insieme I_{HA} delle identità vere nella IDA di HA.
2) I_{HA} è decidibile?

3) Sia T un'estensione r.e. di HA. In genere non è detto $I_T \supseteq I_{HA}$ (ad es. $I_{PA} \not\supseteq I_{HA}$ anche se $PA \supseteq HA$).
   Esiste una T siffatta tale che $I_T = IDA$?

4) L'intersezione delle I_T tali che T è come al punto 3 coincide con IDA?

5) Esite una T come al punto 3 tale che I_T sia indecidibile? Se si, studiare i gradi di indecidibilità delle I_T.

BIBLIOGRAFIA sommaria

1. GARGOV G.K. "A note on provability logics of certain extensions of Heyting's Arithmetic". Preprint.

2. SAMBIN G. "An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras". Studia Logica 35 (1976).

3. SOLOVAY R. "Provability interpretations of modal logic". Israel Journal of Mathematics 25 (1976).

4. URSINI A. "Intuitionistic diagonalizable algebras". Algebra Universalis 9 (1979).

5. URSINI A. "A modal calculus analogous to K4W, based on intuitionistic propositional logic". Studia Logica 38 (1979).

6. VISSER A. "The completeness principle". Preprint.

7. VISSER A. "Aspects of diagonalization and provability". Tesi di dottorato.