Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ITERAZIONI DI ESTENSIONI BOOLEANE

GIUSEPPE ROSOLINI

Le questioni sulle estensioni booleane possono spesso essere interpretate nella teoria dei topos, offrendo occasioni per nuovi spunti. Affronteremo il problema della iterazione di estensioni booleane e proveremo che

$$M[\underset{\sim}{A}][\underset{\sim}{B}] \cong M[\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}] \tag{1}$$

per generiche algebre di Heyting complete $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ ed M struttura finitaria qualunque (a quanto ci è dato di sapere, sono note soltanto soluzioni parziali del problema, cfr. [4]), deducendo la (1) da una proprietà dei topos localici. Si ricordi che $M[\underset{\sim}{A}] = \{s:M \to A \mid \bigvee_{m\in M} sm = 1 \ \& \ \forall m,n\in M.\ sm\wedge sn = sm\wedge\delta(m,n)\}$, dove δ è la funzione di Kronecker. A questo scopo, accenneremo prima alla costruzione dell'algebra tensore (cfr. [5]) ; quindi proveremo che vale la condizione di Beck per un pullback di topos localici, cioè

TEOREMA. Sia

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \tag{2}$$

un pullback di morfismi geometrici tra topos di fasci su algebre di Heyting complete; allora

$$f^* g_* \cong k_* h^*. \tag{3}$$

Si noti che esiste sempre l'algebra $\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$, rappresentante delle funzioni da $A\times B$ che conservano i supremi in ciascuna variabile. Si prova che $\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B} = {\underset{\sim}{B}^{A}}_{j} = {\underset{\sim}{A}^{B}}_{l}$, per opportuni operatori j ed l; se ne deduce che ogni elemento j(d) di $A\otimes B$ con d in $\underset{\sim}{B}^{A}$ è uguale a

$$(4) \qquad \bigvee_{a\in A} a\otimes d_a$$

dove $a\otimes b$ indica l'elemento di $\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$ individuato dalla funzione che manda a in b ed il resto in 0. Siano $k:\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$ ed $h:\underset{\sim}{B} \to \underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$ gli omomorfismi definiti "tensorizzando con 1".

Usando le proprietà della fattorizzazione iperconnesso-localico dei morfismi geometrici tra topos (cfr. [3]), si ha che, se in (2) $\mathcal{G}\simeq\mathcal{S}[\underset{\sim}{A}]$ e $\mathcal{F}\simeq\mathcal{S}[\underset{\sim}{B}]$ per opportune algebre $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ in $\mathcal{S}$, allora deve essere $\mathcal{E}\simeq\mathcal{S}[\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}]$, attesa la proprietà universale del tensore. Proviamo ora il teorema.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X,[\![=]\!])$, un insieme con una $\underset{\sim}{B}$-relazione simmtrica transitiva $[\![=]\!]:X\times X \to B$, un generico oggetto di $\mathcal{S}[\underset{\sim}{B}]$ (per questa descrizione di $\mathcal{S}[\underset{\sim}{B}]$, cfr. [2]). Valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
g_*(X,[\![=]\!]) &= \{s:X \to B \mid S(s) = 1\},\\
f^*g_*(X,[\![=]\!]) &= (g_*(X,[\![=]\!]),\delta),\\
h^*(X,[\![=]\!]) &= (X,\ h\circ[\![=]\!]),\\
k_*h^*(X,[\![=]\!]) &= ((\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B})^X,[\![=]\!]_1),
\end{aligned}$$

dove $S(s)$ sta per $\bigvee_{x\in X} sx \wedge \bigwedge_{x,y\in X}[sx\wedge sy \leftrightarrow sx\wedge[\![x = y]\!]]$ e $[\![t = t']\!]_1 = \bigvee\{a\in A \mid S(t)\wedge S(t')\wedge \bigvee_{x\in X} tx\wedge t'x \geq h(a)\}$ per $t,t':X \to \underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$ definisce una $\underset{\sim}{A}$-relazione simmetrica transitiva (cfr. [1],[2]).

Dati s,s' in $f^*g_*(X,[\![=]\!])$ è facile provare che

$$(5) \qquad [\![hs = hs']\!]_1 = 1 \quad \text{sse} \quad s = s'.$$

Inoltre, dato $t:X \to \underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$, per la (4), si può scrivere

$$tx = \bigvee_{a\in A} a\otimes d_{x}a$$

per ogni x in X. Sia $c = [\![t = t]\!]_1$. Allora la funzione $\bar{d}:x \mapsto d_x c$ da X in A appartiene a $g_*(X,[\![=]\!])$ e si ha

$$(6) \qquad [\![h\bar{d} = t]\!]_1 \geq c.$$

Dalle (5) e (6) si ottiene che la $\underset{\sim}{A}$-funzione F da $f^*g_*(X,[\![=]\!])$ in $k_*h^*(X,[\![=]\!])$, definita da $F(s,t) = [\![hs = t]\!]_1$, è un isomorfismo. Questo prova il teorema.

Per ottenere ora la (1), si consideri un insieme M; sia (M,δ) l'oggetto corrispondente di $\mathcal{S}[\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}]$. E' facile provare dalla (3) che $k_*(M,\delta) = (M[\underset{\sim}{B}],\delta)$. Dunque

$$M[\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}] \simeq f_*k_*(M,\delta) \simeq f_*(M[\underset{\sim}{B}],\delta) \simeq M[\underset{\sim}{B}][\underset{\sim}{A}].$$

Dato che tutti gli isomorfismi che compaiono sopra sono naturali, il risultato si estende alle strutture.

Bibliografia

[1] M.P.FOURMAN, D.S.SCOTT, Sheaves and logic, in SLN 753.

[2] J.M.E.HYLAND, P.T.JOHNSTONE, A.M.PITTS, Tripos theory, Math.Proc.CambridgePhil.Soc. (1980).

[3] P.T.JOHNSTONE, Factorization and pullback theorems for localic morphisms, Rapport n.79, Université Catholique de Louvain.

[4] R.MANSFIELD, The theory of boolean ultrapowers, Ann.Math.L. 2 (1971).

[5] M.TIERNEY, Some remarks on change of base, lecture held at the Cambridge Summer School in Category Theory, 1981.