Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

CATEGORIE E INSIEMI

MARIO SERVI

Nelle teorie degli insiemi si potrebbero assumere come primitive relazioni e operazioni diverse dall'appartenenza. Ad esempio, se si assume l'inclusione come primitiva, è ovvio che i primi assiomi debbano essere:

ASS. 1. - $\subseteq$ è l'ordine di un reticolo distributivo, dotato di minimo, $\emptyset$, ma non di massimo, e atomico;

ASS. 2. - Tale reticolo è "localmente booleano" (c'è un'operazione di differenza, di Brouwer, tale che $(a-b)\cap b=\emptyset$);

ASS. 3. - Vale la seguente versione debole dell'isolamento:

$$(Ey)(\forall x)(At(x) \longrightarrow (x\subseteq y \longleftrightarrow A(x))),$$

dove $At(x)$ sta per $\neg(x=\emptyset)\&(\forall y)(y\subseteq x \longrightarrow y=\emptyset \vee y=x)$.

E' ovvio che gli assiomi dati fin qui sono tutti esprimibili nel linguaggio del 1° ordine con uguaglianza, avente il predicato binario $\subseteq$ come unico segno extralogico.

Si potrebbe aggiungere un simbolo funzionale per la coppia, o per il singoletto, diciamo S, e porre l'assioma:

ASS. 4. - $At(x) \longleftrightarrow (Ey)(x=S(y))$, ossia, gli atomi sono esattamente i singoletti.

A questo punto, però, diventa definibile l'appartenenza: $x \in y \longleftrightarrow S(x) \subseteq y$ e si può procedere richiedendo tutti gli assiomi di ZF che non siano già dimostrabili. L'estensionalità è dimostrabile, e lo diventano anche la coppia e l'isolamento, se si rafforza l'assioma 4 chiedendo che sia iniettiva l'operazione di passaggio al singoletto:

ASS. 5. - $At(x) \longrightarrow (E!y)(x=S(y))$.

Un tentativo analogo si potrebbe provare prendendo come concetti primitivi quello di applicazione e quello di composizione fra applicazioni. Se vogliamo procedere in un linguaggio del 1° ordine, si può assumere un predicato ternario K di composizione e due simboli funzionali unari D, C (dominio e codominio). Gli assiomi ragionevoli sono del tipo:

1) La composizione è funzionale. La composizione di x con y è definita se e solo se il codominio di x coincide col dominio di y.

2) La composizione è associativa (quando definita).

3) I domini e i codomini si comportano da elementi neutri.

Indichiamo con C la teoria ottenuta. Si giunge così al noto concetto di categoria. Chiaramente, ogni modello di una teoria degli insiemi è una categoria, ma la teoria elementare C delle categorie è ben più debole di ZF. Rispetto al tentativo precedente con l'inclusione, non siamo molto più avanti dell'ASS. 3.

Presentare le categorie in questo modo, come generalizzazione della categoria **Set** degli insiemi è scorretto sia dal punto di vista storico che da quello tecnico. Storicamente, infatti, credo che le categorie siano nate avendo in mente, più che la categoria degli insiemi, le categorie di spazi topologici, la categoria dei gruppi abeliani, e, più in generale, le categorie di strutture matematicamente rilevanti (delle quali gli insiemi sono un caso limite). Tecnicamente, il livello di generalità di C è tanto più ampio di ZF, che accostarsi alle categorie avendo in mente **Set** non può che essere fuorviante (ad esempio, in **Set** per ogni oggetto A c'è corrispondenza biunivoca fra A e [1, A]; ma questo può essere assai lontano dal vero in generale (ove abbia senso; si pensi alla categoria **Ab** dei gruppi abeliani!)).

Tuttavia, per quanto ingenuo, il tentativo di pensare ad una generica categoria come una "ragionevole" generalizzazione di **Set**, dà alcuni frutti, specialmente se si particolarizza un po'. E' noto, infatti, che all'interno di C sono definibili i prodotti cartesiani (e in particolare gli oggetti terminali, come prodotti della famiglia vuota). Col prodotto (finito) e l'1 a disposizione, si possono definire le strutture algebriche (un'operazione n-aria su A è un morfismo $A^n \longrightarrow A$) e dare il concetto di equazione vera in una algebra. Così, ad esempio, si può dire cosa sia un'algebra di Heyting: tre operazioni binarie $\cup$, $\cap$, $\Longrightarrow$: $A^2 \longrightarrow A$ e un'operazione zeroaria 0: $1 \longrightarrow A$, soddisfacenti le opportune equazioni.

Questa strada può essere percorsa ulteriormente, se si arricchiscono le categorie; si può parlare, così, anche di strutture del 1° ordine (multisorte), e si può dare la definizione di verità per le formule di Horn universali. L'ambiente più adatto per svolgere una semantica categoriale fino a questo livello è costituito dalle categorie con limiti finiti, ma con qualche artificio la cosa può essere parzialmente eseguita anche sotto ipotesi più deboli.

Una prima spiegazione del perchè questa analogia con **Set** funzioni (malgrado le precedenti osservazioni) è fornita dal lemma di Yoneda. Do per scontato il concetto di funtore e quello di trasformazione naturale. Così, date due categorie **A**, **B**, si può parlare della categoria $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$, i cui oggetti sono i funtori F: $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali ß: $F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$. Il lemma di Yoneda dice che ogni categoria **C** si può immergere in una categoria di funtori, precisamente $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^\circ}$. Esplicitamente, l'immersione di Yoneda Y: $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^\circ}$ opera come segue:

$$Y: A \longmapsto h_A,$$

dove h_A è il funtore rappresentabile controvariante $[-, A]$,

che associa a ciascun oggetto X l'insieme $[X, A]$. In ultima analisi, il funtore rappresentabile h_A si può pensare come costituito dalla famiglia di insiemi $[X, A]$, e, via l'immersione Y, ogni oggetto di **C** finisce per essere (associato biunivocamente a) una famiglia di insiemi.

Ingenuamente si potrebbe dire di aver scoperto la chiave del perchè gli oggetti di una categoria si comportano come insiemi; ma attenzione, c'è qualcosa che non va. Il lemma di Yoneda vale per tutte le categorie, mentre le considerazioni di semantica categoriale richiedono via via ipotesi più particolari per funzionare. Sorge dunque il dubbio che la spiegazione data sia insufficiente. Mettiamo da parte questo dubbio, per il momento, e vediamo se, riprendendo l'analogia iniziale con l'inclusione, sia possibile rafforzare la teoria C fino a farla diventare (equipollente a) ZF.

Il tentativo è stato compiuto da Lawvere, quasi con successo, nel 1964. Chiamiamo CS la teoria elementare che si ottiene da C mediante l'aggiunta dei seguenti assiomi:

1) Esistenza dei limiti finiti. Si può fare al 1° ordine, chiedendo l'esistenza di oggetto terminale, prodotto di due oggetti, ugualizzatore di due morfismi.

1°) Esistenza dei colimiti finiti.

2) L'oggetto terminale è un generatore. Se chiamiamo elemen-

to di A ogni morfismo $1 \longrightarrow A$, questo assioma finisce per dire che gli elementi di A sono sufficienti a distinguere le mappe in partenza da A.

3) Le somme (coprodotti) si comportano come unioni disgiunte. (Si ottiene chiedendo:

3.1) A, B sono sottoggetti di A+B e ogni elemento di A+B appartiene ad A o a B;

3.2) 1+1 ha esattamente due elementi).

4) Assioma di scelta: Per ogni $A \neq \emptyset$ ed ogni $f: A \longrightarrow B$, c'è $g: B \longrightarrow A$ con $fgf = f$.

5) Assioma dell'infinito: esiste un oggetto di Peano.

6) Esistenza dell'esponenziale A^B. Come i prodotti e i coprodotti, anche l'esponenziale si può esprimere in termini categoriali (anche al 1° ordine); brevemente, si chiede che per ogni A, B il funtore controvariante $[B \times (-), A]$ sia rappresentabile.

oooooooooo

Su questa strada, CS rappresenta l'approssimazione ottimale alla teoria ZF (ma non la raggiunge). Chiaramente, **Set** è modello di CS; ma viceversa, si dimostra che un modello di CS è equivalente a **Set** solo se ha i limiti e colimiti arbitrari (e questo non è esprimibile nel linguaggio di CS).

Dunque, un modello di CS rappresenta una generalizzazione propria della categoria **Set** degli insiemi. Questo, di per sè, non è sufficiente per scartare CS. Basti pensare a cosa succede quando, a partire dai campi completi di insiemi, si estrae la teoria equazionale: si trova il concetto di algebra di Boole, ed un'algebra di Boole è isomorfa a un qualche B(S) solo se è completa e atomica (**NON** esprimibile con equazioni). Tuttavia non si può negare che il concetto ottenuto sia interessante.

Malgrado ciò, CS ha avuto poca fortuna. Probabilmente, la generalizzazione di **Set** così ottenuta non è "buona" (o almeno, non si è rivelata tale fino ad oggi); essa, per così dire, non coglie un punto "di equilibrio" (di "minimo per il potenziale", se mi si concede l'immagine).

Dunque, la sfortuna di CS non è imputabile al fatto che essa è più debole delle teorie degli insiemi (diciamo ZF, per fissare le idee). Un tentativo più fortunato di generalizzare **Set** con strumenti e linguaggio categoriali è venuto qualche anno più tardi con la **teoria elementare dei topos**, ET. Può valer la pena di richiamare la definizione di topos elementare, anche perchè molto breve.

Una categoria **C** è un topos elementare se:

(i) ha i limiti finiti;

(ii) ha l'esponenziale;

(iii) il funtore controvariante P: **C** $\longrightarrow$ **Set** che associa a ciascun oggetto X l'insieme P(X) dei sottoggetti di X, è rappresentabile. Vuol dire che esiste un oggetto privilegiato L, tale che $P \approx h_L$. In termini più espliciti, c'è una biiezione $P(X) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow [X, L]$, naturale in X.

La definizione può apparire povera, ma non ci si lasci ingannare. Certamente ET è più debole di CS (in CS il ruolo di L viene giuocato da 1+1), ma non in proporzione alla semplicità degli assiomi. Il fatto è che i topos sono stati tanto studiati, che è stato possibile limarne la presentazione fino a quella che vi ho fornito io (e oltre!); ma le conseguenze nascoste da questi assiomi sono molteplici e notevoli. Un concetto precedente, sorto nell'ambito della geometria algebrica è quello di topos di Gröthendieck, che è un topos elementare con tutti i limiti e i colimiti (NON 1° ordine).

Il concetto di **topos** sembra particolarmente indovinato (è un punto di **grande stabilità**, nello spazio delle generalizzazioni di **Set**); almeno così sostengono i cultori della materia.

Cominciamo col dire in che rapporto si pone ET con CS e con **Set**. Abbiamo già osservato che CS estende ET; quanto? Per ottenere CS da ET basta aggiungere:

a) Scelta: ogni epimorfismo è invertibile a destra;

b) Infinito: esiste un oggetto di Peano (ossia un'algebra di tipo (1, 0) soddisfacente l'induzione semplice);

c) L'oggetto terminale non ha sottoggetti propri.

Si osservi che i topos, in generale, sono essenzialmente intuizionisti. Per chiarire questa affermazione, è opportuno esplicitare alcune delle conseguenze degli assiomi. Sia dunque **E** un topos; allora:

1°) **E** possiede immagini (stabili per pullback).

2°) L, che giuoca il ruolo di "oggetto dei valori di verità", possiede una struttura naturale di **algebra di Heyting**; se essa è di Boole, il topos si dice booleano. Ovviamente, **Set** è booleano.

3°) Ogni [X, L] (e quindi ogni P(X)) ha una struttura di algebra di Heyting (concreta). Ne segue che in un topos si interpretano bene tutti i connettivi proposizionali.

4°) Per ogni $f: X \longrightarrow Y$, la funzione crescente $P(f): P(Y) \longrightarrow P(X)$ ha aggiunto sia destro che sinistro; questo permette di interpretare i quantificatori (la presenza di L^X permette di interpretare anche formule di ordine superiore).

Dunque, dato un linguaggio anche di ordine superiore (anche a più sorte) è possibile interpretarlo in un topos.

Ci saranno perciò delle formule che risultano valide in un dato topos e formule che risultano valide in tutti. Quali sono? Si dimostra agevolmente che, dato un calcolo di sequent alla Gentzen, tutti i sequent dimostrabili **intuizionisticamente** sono validi in tutti i topos, e tutti i sequent dimostrabili classicamente sono validi in tutti i topos booleani. Dato un topos, **E**, c'è poi un linguaggio particolare associato ad esso: quello che ha come sorte gli oggetti di **E** e come simboli funzionali i morfismi di **E**. Tale linguaggio è atto a descrivere la struttura interna del topos **E**.

E' ovvio che in questo modo abbiamo ottenuto un notevole ampliamento dell'ambito in cui cercare i modelli per le teorie (intuizioniste). Anzichè limitarsi ai consueti modelli (che sono modelli in **Set**), si possono utilizzare anche gli eventuali modelli in **E**, per ogni topos **E**. Il vantaggio di questa maggiore ricchezza semantica dovrebbe essere ovvio e comunque balza all'occhio l'analogia coi modelli booleani (dei quali i consueti modelli a due valori sono solo una parte), che sono risultati utili per affrontare diverse questioni di indipendenza.

Questa analogia ha fatto classificare la logica categoriale come una versione moderna (nonchè un poderoso sviluppo) della logica algebrica. Ma l'analogia si spinge oltre. Al teorema di validità suaccennato si affianca infatti un teorema di completezza, dimostrato con metodi del tutto simili a quelli del modello canonico di Rasiowa-Sikorski.

Poco meno di dieci anni fa si è giunti a formulare una

costruzione che ricorda l'algebra di Lindenbaum-Tarski, solo con "più spessore" (una specie di versione tridimensionale dell'algebra di Lindenbaum-Tarski). La costruzione è dovuta a Dionne, Joyal e altri, e si svolge come segue. Data una teoria intuizionista (multisorte, di ordine superiore), si può associare ad essa un "topos canonico", prendendo come oggetti le formule e come morfismi le classi di equivalenza (sintattica) di formule che siano dimostrabilmente funzioni.

In tal modo si perviene a un topos nel quale **sono validi** (tutti e) **soltanto i sequent dimostrabili.**

A questo punto proviamo a scendere a teorie più povere (1° ordine, geometriche, assiomatizzabili con formule di Horn universali, con equazioni etc.). Ripetendo la costruzione di Dionne-Joyal, la categoria cui si perviene è più povera di un topos, secondo la seguente tabella:

TEORIE	CATEGORIE
Equazionale	Con prodotti finiti
Horn univ.	Con limiti finiti
E!	" " "
Geometrica	Regolare
Ordine sup. multis. intuiz.	**Topos**

Si è così invertita (e rafforzata) la corrispondenza che avevo delineato all'inizio, parlando di semantica categoriale. In questo senso, possono destare perplessità i tentativi di interpretare formule più ricche in categorie troppo povere.

Riprendiamo in esame l'immersione di Yoneda, Y. Dato un topos **E**, anche $\mathbf{E}^{\mathbf{C}}$ è un topos (non necessariamente booleano se tale è **E**). In particolare $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^\circ}$ è un topos; i suoi oggetti, detti <u>prefasci</u>, sono (come già visto) famiglie di insiemi. Inoltre, $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^\circ}$, come ogni topos, generalizza **Set**, e forse in questo senso ogni categoria può essere (parzialmente) pensata come categoria di insiemi. Ma anche questo è ingenuo: bisogna vedere quanta struttura viene conservata da Y. Per chiarire meglio, si pensi alla seguente analogia con le algebre di Boole. Ogni algebra di Boole B è immergibile in una della forma B(S); ma non è lecito identificare una generica B con un campo completo di insiemi: le cose vanno bene, solo per la parte equazionale. Se anzichè partire da un'algebra di Boole B si parte da un reticolo di Heyting A (o addirittura da un qualunque reticolo distributivo) le cose vanno ancora peggio. E' vero che A è ancora immergibile in B(S) (come reticolo), ma in generale le peculiarità interessanti di B(S) non si trasmettono ad A. Un ben noto artificio per migliorare la situazione è il seguente. Dato A come sottoreticolo di B(S), si può ulteriormente strutturare B(S) con un opportuno operatore K di Kuratowski e poi considerare il sottoreticolo T degli aperti; se K è scelto bene, A risulta sottoreticolo anche di T, ma conservando più

struttura. Ad esempio, se A è di Heyting, si può ottenere che A sia sottoreticolo di Heyting di T (cioè l'inclusione conserva anche lo pseudocomplemento relativo). Questa divagazione di logica algebrica in senso classico, svolta soprattutto a beneficio di chi non ha troppa familiarità con le categorie, ha un riscontro assai interessante nei topos.

Anzitutto, se **C** ha i limiti finiti, la corrispondente semantica si fa bene; perchè? Perchè Y conserva i limiti finiti; però, ad esempio, non conserva i colimiti finiti.

Si osservi che, se **C** è la categoria dell'ordine associata a uno spazio topologico X (gli oggetti sono gli aperti di X e i morfismi le sole inclusioni), allora fra i prefasci di $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^\circ}$ ce ne sono alcuni particolari detti <u>fasci</u>. Dire che $F\colon \mathbf{C}^\circ \longrightarrow \mathbf{Set}$ è un fascio, vuol dire che se $(U_i)_{i\in J}$ è un ricoprimento (aperto) di U ed $f_i : U_i \longrightarrow U$ è l'inclusione, per ogni famiglia "compatibile" $(s_i)_{i\in J}$ con $s_i \in F(U_i)$, esiste un unico $s \in F(U)$ tale che $s_i = F(f_i)(s)$. Chi ha familiarità con le sezioni locali di una proiezione continua, può pensare al fascio delle sezioni locali (e delle relative restrizioni).

La cosa si può generalizzare a una categoria astratta **C**, purchè per ogni oggetto A di **C** sia data una famiglia di "ricoprimenti" di A, con opportune condizioni. Un tale sistema di famiglie di ricoprimenti si chiama una <u>topologia di Gröthendieck</u> su **C**, e diremo <u>sito</u> ogni coppia (**C**, T), con T topologia di Gröthendieck su **C**. Dato un sito (**C**, T), ha ancora senso dire che un prefascio è un fascio. Si dimostra che <u>La sottocategoria piena di $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ costituita dai fasci è</u>

ancora <u>un topos</u> (non un sottotopos di Set^{C}).

Dunque, data **C**, possiamo ottenere diversi topos, uno per ogni struttura di sito su **C**. Indichiamo con $Sh_T(\mathbf{C})$ il topos relativo a (**C**, T). Se T è semplice (banale), $Sh_T(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}°}$. Esiste la più fine topologia di Gröthendieck su **C** tale che Y immerga **C** in $Sh_T(\mathbf{C})$; essa si chiama <u>canonica</u>; si dice <u>subcanonica</u> ogni altra topologia meno fine di quella canonica. Riassumendo, se T è subcanonica, Y immerge **C** in $Sh_T(\mathbf{C})$. Si può cercare di scegliere T in modo che Y conservi qualcosa in più: talvolta ci si riesce, con tutti i vantaggi del caso.

In questo senso, più potenziale che attuale, la relazione fra una generica categoria **C** e la categoria degli insiemi si fa più stringente (semprechè si consideri la teoria dei topos una buona generalizzazione delle teorie degli insiemi: ma su questo punto preferisco non pronunciarmi oltre e aprire la discussione).

BIBLIOGRAFIA

1 W. S. HATCHER, <u>Foundations of Mathematics</u>, Saunders 1967.

2 P. T. JOHNSTONE, <u>Topos Theory</u>, Academic Press 1977.

3 M. MAKKAI & G. REYES, <u>First order categorical logic</u>, **Lecture Notes in Math. 611, Springer-Verlag** 1971.

4 G. OSIUS, <u>Logical and set-theoretical tools in elementary topoi</u>, **Lecture Notes in Math. 445**, Springer-Verlag **1975**, 297-346.