Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

RELAZIONI DI EQUIVALENZA POSITIVE RAPPRESENTATE DA FORMULE

Claudio Bernardi

Ricordiamo innanzitutto una definizione e un teorema dovuti a Eršov.

Definizione. - Una relazione di equivalenza R definita nell'insieme ω dei numeri naturali si dice *precompleta* se per ogni funzione parziale ricorsiva ψ esiste una funzione totale ricorsiva f tale che, se ψ converge su x, allora $\psi x \, R \, fx$.

Teorema. - *Se R è una relazione di equivalenza precompleta ed f è una funzione totale ricorsiva, esiste un n ("punto fisso") tale che $fn \, R \, n$.*

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di relazioni di equivalenza, definite nell'insieme ω, che siano *positive*, cioè per cui sia possibile enumerare le coppie associate dalla relazione stessa.

Esempio 1. Consideriamo la relazione che associa due numeri x, y sse è dimostrabile (ad esempio in PA) l'uguaglianza delle due funzioni φ_x, φ_y. E' facile dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza positiva precompleta (una funzione parziale ψ si può prolungare ad una funzione totale f ponendo

$$\varphi_{fx} z = \begin{cases} \varphi_{\psi x} z & \text{se } \psi x \text{ converge,} \\ \text{divergente altrimenti} \end{cases}).$$

Il teorema precedente, applicato a questa relazione di equivalenza è il teorema di recursione.

Esempio 2. Sia $\sim$ la relazione positiva così definita: $x \sim y$ sse le sentenze di gödeliani x,y sono dimostrabilmente equivalenti in *PA*. Questa relazione non è precompleta, perché la funzione totale ricorsiva associata al connettivo *non* è priva di punti fissi.

Ora, a una formula $F(v)$ con una variabile libera associamo la relazione di equivalenza $\sim_F$ così definita: $x \sim_F y$ sse $\vdash F(x) \longleftrightarrow F(y)$.

Teorema. - *Le relazioni di equivalenza positive sono tutte e sole quelle del tipo* $\sim_F$.

Questo teorema assicura che ogni relazione di equivalenza positiva è rappresentata da una formula; ci proponiamo ora di studiare le relazioni di equivalenza positive rappresentate da formule *estensionali*, nel senso che $\vdash p \longleftrightarrow q$ implica $\vdash G(\ulcorner p \urcorner) \longleftrightarrow G(\ulcorner q \urcorner)$. Questo, naturalmente, equivale alla richiesta che $\sim_G \supseteq \sim$.

Teorema. - *Nelle condizioni precedenti,* $\sim_G$ *è* (a) *totale, oppure* (b) *ricorsivamente isomorfa alla relazione* $\sim$*, oppure* (c) *precompleta.*

Esempio. La formula *Theor (v)* dà luogo ad una relazione che rientra nel caso (c). Di conseguenza, per ogni funzione totale ricorsiva f esiste una sentenza p tale che $\vdash Theor(\ulcorner p \urcorner) \longleftrightarrow Theor(f\ulcorner p \urcorner)$. Questa circostanza suggerisce lo studio delle algebre

diagonalizzabili in cui, per ogni polinomio f, esiste un a tale che $\tau a = \tau f a$.

Vale anche il teorema inverso del precedente.

Teorema. - *Ogni relazione di equivalenza positiva di uno dei tipi* (a),(b),(c) *è, a meno di isomorfismi, rappresentabile con una formula estensionale.*

Esaminiamo, infine, altri due teoremi che forniscono condizioni perché una formula $G(v)$ estensionale si trovi nel caso (c).

Teorema. - *Condizione sufficiente (ma non necessaria) perché una relazione* $\sim_G$ *sia precompleta è che* $G(v)$ *sia, per un opportuno* n*, a "dominio limitabile a* Σ_n*", cioè che* $\forall p\, \exists q \in \Sigma_n$ *tale che* $\vdash G(\ulcorner p \urcorner) \longleftrightarrow G(\ulcorner q \urcorner)$. (In altre parole, ogni classe di equivalenza rispetto a $\sim_G$ contiene una formula Σ_n). Una condizione equivalente a quest'ultima è l'esistenza di una formula $H(v)$ che sia un "predicato di verità" per $G(v)$, nel senso che, per ogni x, $\vdash G(x) \longleftrightarrow G(\ulcorner H(x) \urcorner)$ (cioè $x \sim_G \ulcorner H(x) \urcorner$).

Teorema. - *Condizione necessaria e sufficiente perché la relazione* $\sim_G$ *sia precompleta è che esista una funzione totale ricorsiva* f *tale che per ogni* x $\vdash G(f\ulcorner G(x) \urcorner) \longleftrightarrow G(x)$. (In termini intuitivi: f deve "invertire" G; si noti che esiste sempre una funzione parziale ricorsiva ψ con tale proprietà: la possibilità di prolungare la sola ψ è sufficiente per concludere che $\sim_G$ è precompleta).

Bibliografia

Ju.L.Eršov, *Theorie der Numerierungen I*, Zeitschrift für Math. Log., 19 (1973), 289 - 338.

A.Visser, *Numerations, λ- Calculus & Arithmetic*, in *To H.B.Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, (Hindley and Seldin editors), Academic Press, Londra 1980.

C.Bernardi - A.Sorbi, *Classifying positive equivalence relations*, in corso di stampa su The Journal of Symbolic Logic.

F.Montagna, *Relatively Precomplete Numerations and Arithmetic*, in corso di stampa su The Journal of Philosophical Logic.

C.Bernardi - F.Montagna, *Positive equivalence relations represented by formulas*, in corso di stampa.