Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Σ_1-Modelli di sottoteorie di KPI

Andrea Cantini

Ci occuperemo di raffinamenti di tipici problemi di definibilità, raffinamenti che costituiscono in certo senso un ponte tra le teorie degli Insiemi, della Ricorsività e della Dimostrazione.

1. Se T è una teoria elementare degli insiemi, L_α è detto Σ_1-modello ([13]) di T se $L_\alpha \models A$, per ogni Σ_1-enunciato A tale che $T \vdash A$. $LM(T,\alpha)$ abbrevia: "L_α è il più piccolo Σ_1-modello di T".
Al fine di motivare la definizione e il problema della determinazione di Σ_1-modelli di teorie date, supponiamo che $V \models \exists z B$, dove B è Δ_0, priva di parametri. E' noto allora (teoremi di Shoenfield, Kripke, Platek, [1]) che:
1.1. esistono un ordinale α, numerabile e Δ^1_2, e un insieme $b \in L_\alpha$, tali che $L_\alpha \models B[b]$.
Rafforziamo ora l'ipotesi $V \models A$, sostituendola con $T \vdash A$: che cosa siamo in grado di dire in più su α e b ?
2. Qui considereremo il problema per alcune sottoteorie di KPI (c.f.r. [2] per la terminologia). Ciò per due motivi: 1) l'interesse di KPI per la pratica matematica risulta già esaurito da quelle sottoteorie in cui lo schema
TI $:= \forall x(\forall y \in x A(y) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall z A(z)$ è ristretto;

2)alla luce di recenti tentativi di estendere i metodi di Kirby-Paris a teorie insiemistiche ([7],[8],[9]),hanno importanza teorie in cui occorrono Σ^1_1-TI e Π_1-TI ovvero TI ristretto a formule Σ_1 e Π_1.Indichiamo con IND lo schema generale di induzione su ω,mentre Σ^1_1-DC è lo schema delle scelte dipendenti per Σ^1_1-formule; LC è l'assioma "ogni insieme è numerabile(al più)". KPI_0 è la sottoteoria di KPI che contiene,invece di TI,il solo assioma di fondazione;KPI_1 è KPI_0+ + Σ^1_1-TI e KPI_1^+ è KPI_1+IND+LC+ Σ^1_1-DC.

Osservazione. $KPI_0 + \Sigma^1_1\text{-DC} \vdash \Pi_1\text{-TI}$.

Teorema 1. $LM(KPI_0 + \Sigma^1_1\text{-DC+IND+LC}, \varepsilon_0)$.

Il seguente risultato riguarda un problema di [7].

Teorema 2. (i) $LM(KPI_1, \phi\omega 0)$;

(ii) $LM(KPI_1^+, \phi\varepsilon_0 0)$.

Qui $\phi\alpha\beta$ è la consueta gerarchia di Veblen[12]. Le dimostrazioni constano di due parti.Nella prima si applica la Teoria della Ricorsività,per costruire modelli maneggevoli delle teorie.Nella seconda si simulano mediante calcoli infinitari o sistemi di funzionali di tipo finito sugli ordinali i modelli stessi,applicando poi tecniche di normalizzazione ([11]).

Applicazioni(T,α come nel teorema 2).Si ottiene: (i)ogni funzione ricorsiva su ω-dimostrabilmente in T-è maggiorabile dalla funzione f_α nella gerarchia veloce di Grzegorczyk;(ii) ogni funzione ricorsiva ordinale-dimostrabilmente tale in T-è al più α-ricorsiva([3]).

Un problema.Sia β l'asserto "per ogni relazione ben fondata $\prec$,c'è una funzione C tale che campo($\prec$)$\subseteq$ $\subseteq$ dom(C) e $C(x)=\{C(y): y\prec x\}$,per ogni $x \in$ dom(C). Si trovi α tale che $LM(KPI_1+\beta, \alpha)$.Si sa che $\alpha \geq \Gamma_0$ .Congettura: $\alpha \leq \Gamma_0$ .Per l'interesse di $KPI_1+\beta$ per la Teoria classica della Definibilità, c.f.r. [7],[8].Si prova $KPI_1+\beta+\Pi_1\text{-TI} \vdash A \to A^L$,per ogni Σ^1_1-enunciato A;per quest'ultima teoria S,si congettura $LM(S, \Gamma_{\varepsilon_0})$.

Conclusioni.L'indagine sui Σ^1_1-modelli di teorie T$\supset$ $\supset$ KPI ha dato origine ([6],[13])alla "Admissible Proof Theory".A tutt'oggi si sa trattare la teoria KPi,la quale costituisce-grosso modo-la teoria di L_J,dove J è il più piccolo ordinale $>\omega$ ricorsivamente inaccessibile.

Bibliografia.

1.Barwise,J.:Admissible Sets & Structures,Springer 1975;
2.Lolli,G.:Teoria Assiomatica degli Insiemi,Torino 1974;
3.Hinman,P.:Recursion-theoretic Hierarchies,Springer 1978;
4.Jäger,G.:Zur Beweistheorie von KPN,Archiv f.Math. Logik u.Grund.,vol.20(1980),pp.53-63;
5. " :Zur Beweistheorie der KP-Mengenlehre über den natürlichen Zahlen,preprint;
6. " :Iterating Admissibility in Proof Theory,

A.S.L.Meeting,Marsiglia 1981;
7.Simpson,S.:Set theoretic Aspects of ATR_0,preprint;
8.Friedman,H.,Mac Aloon,K.,Simpson,S.:A finite combinatorial statement,which is equivalent to 1-consistency of Predicative Analysis,preprint;
9.Mac Aloon,K.,Ressayre,J.P.:Les methodes de Kirby Paris et la theorie des ensembles,Springer Lecture Notes in Math.,n° 8 ;
10.Buchholz,W.,Feferman,S.,Pohlers,W.:Iterated Inductive definitions,Springer Lecture Notes in Math. n° 8 ;
11.Cantini,A:Non-extensional theories of predicative classes over PA I,II,preprint;
" :A note on the theory of admissible sets with $\in$-induction restricted to formulas with one quantifier and related systems,preprint;
12.Schütte,K.:Proof Theory,Springer 1977;
13.Pohlers,W.:Admissibility in Proof Theory:a survey,preprint.