Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ALCUNE QUESTIONI DI DECIDIBILITA' IN TEORIA DEGLI INSIEMI

ALFREDO FERRO

Seminario Matematico

Università di Catania

Il problema di trovare classi di formule decidibili in teoria degli insiemi non è stato molto studiato. Infatti dopo i risultati classici di TARSKI - BEHMANN (Teoria elementare dell'algebra di Boole con un operatore di cardinalità ed aritmetica di Presburger), si ha solo un lavoro di F. VILLE (C.R. Acad. Sci. Pris, t. 272, 1971: Formule non quantificate nel linguaggio $=$, $\in$, $\emptyset$ (vuoto), $\cup$ (unione binaria), $\{\ \}$ (operatore singoletto), e due risultati di D. GOGOL (Fund. Math. CII, 1979 e Zeitschr. f. Math. Logik, 2, 1978: Formule premesse con 3 quantificatori e formule premesse con prefisso $\forall \ldots \forall \exists$).

Il recente sviluppo della deduzione automatica e della verifica automatica della correttezza dei programmi ha aumentato l'interesse per tali questioni.

Ferro, Omodeo e Schwartz (Comm. Pure Appl. Math. 33, 5 (1980)) hanno trovato una procedura di decisione per la teoria MLS che è la teoria non quantificata nel linguaggio $=, \in, \cup, \setminus$ (differenza insiemistica). Hanno inoltre esteso tale procedura al caso in cui sono presenti l'operatore $\{\ \}$ e l'operatore di cardinalità assieme a $+$, $\leq$ fra cardinali.

Gli stessi autori con Breban (Comm. Pure Appl. Math. 34, 2, 1981) hanno dimostrato che la seguente classe di formule quantificate è decidibile.

Tutte le combinazioni proposizionali di formule del tipo

$$(\forall x_1 \in y_1)(\forall x_2 \in y_2) \ \dots \ (\forall x_n \in y_n)p$$

dove

(1) Nessuna x_i è una y_j , $i,j=1,\dots,n$

(2) p è una formula senza quantificatori nel linguaggio comprendente: variabili insiemistiche $x,y,\dots$; variabili funzionali $f,g,\dots$; la costante $\emptyset$ (vuoto); i predicati $=$ (uguaglianza), $\in$ (appartenenza), Ord (essere un ordinale), Int (essere un intero) ; l'operatore D (dominio di). Con la restrizione che p non contenga termini del tipo $f(g(t))$ e che nessun termine $f(x)$ appaia alla sinistra di $\in$.

Alcune di queste procedure sono parte del verificatore in corso di implementazione al Courant Institute (New York).

Ci si è posti il problema di estendere la teoria MLS (eventualmente addizionata di { }) con gli operatori pow (insieme delle parti di) e Un (unione generalizzata) e si è congetturato che tale estensione è decidibile. (Si osservi come gli operatori pow, Un *non sono esprimibili* mediante formule quantificate del tipo descritto sopra).

M. Breban ed io abbiamo ottenuto risultati parziali in questa direzione più precisamente abbiamo dimostrato che:

1) MLS con al più 2 occorrenze di "pow" è decidibile

2) MLS +{ } +1 sola occorrenza di pow (o Un) è decidibile

3) MLS + il predicato Trans (x) (x è transitivo, cioè $x \subseteq pow(x)$ ovvero $Un(x) \subseteq x$) è decidibile.

Tali risultati costituiscono parte di un lavoro accettato per la pubblicazione sulla rivista Communications on Pure and Applied Mathematics.