Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

FORMALIZZAZIONI DEL "PRINCIPIO DI LIBERA COSTRUZIONE"

Marco Forti☆ e Furio Honsell☆☆

0. Introduzione

Scott [6], Hajek [5], Boffa [1] e [2] ed altri hanno considerato assiomi contraddicenti l'assioma di fondazione, che oltre ad un interesse filosofico-fondazionale hanno interessanti applicazioni (e.g. classificazione di formule, isomorfismi elementari di V, modelli naturali del λ-calcolo).

Nella teoria ingenua degli insiemi si presenta naturalmente un "principio di libera costruzione" che asserisce, in sostanza, la possibilità di costruire un insieme E i cui elementi intersecano E ed il suo complementare in sottoinsiemi assegnati a priori (attraverso una codifica).

Nelle tradizionali assiomatizzazioni questo principio viene fortemente limitato, in particolare assumendo l'assioma di fondazione. Noi abbiamo formalizzato il principio nel modo seguente [4]

Υ : data una funzione $f:A \rightarrowtail B$ esiste una funzione $g:A \rightarrowtail E$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[drr, "\cap\times\cap"] & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[d, "g"] & & & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(\bigcup B\setminus A) \arrow[d, "\hat{g}\times id"] \\
E \arrow[dr, "id"] & & & \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(\bigcup B\setminus A) \arrow[dll, "\cup"] \\
 & \mathcal{P}(E\cup(\bigcup B\setminus A)) & &
\end{tikzcd}$$

Risulta che tutti gli assiomi finora considerati in alternativa alla fondazione sono ottenibili aggiungendo

- - - - -

☆ Ist. di Matematica "L. Tonelli" - Università di Pisa

☆☆ Scuola Normale Superiore - Pisa

particolari condizioni all'assioma Υ . Noi abbiamo considerato ([3] ,[4]) varie formulazioni di questo assioma, due delle quali rappresentano le due possibili estensioni massimali del teorema d'isomorfismo di Mcstowski.

1. Definizioni e preliminari

Si consideri una funzione $f: A \twoheadrightarrow B$.

Def.1 Una funzione $g: A \twoheadrightarrow E$ si dice f-*induttiva* (risp. f-*costruttiva*) se $\forall x \in A$ si ha

$g(x) = \hat{g}(f(x) \cap A)$ (risp. $g(x) = \hat{g}(f(x) \cap A) \cup (f(x) \setminus A))$)

Consideriamo allora i seguenti assiomi

X (risp. Υ) : per ogni f esiste g f-induttiva (risp. f-costruttiva)

X_1 (risp. Υ_1) : per ogni f esiste un'unica g f- induttiva (risp. f-costruttiva)

X_i (risp. Υ_i) : per ogni f iniettiva esiste g f-induttiva ed iniettiva (risp. f-costruttiva)

si noti che X_i corrisponde all'esistenza e Υ_1 all'unicità dell'isomorfismo di Mostowski per relazioni arbitrarie.

Def.2 $C \subseteq A$ si dice f-*transitivo* se $x \in C$ implica $f(x) \cap A \subseteq C$

$C \subseteq A$ si dice f-*saturato* se $f(x) \cap A \subseteq C$ implica $x \in C$

$x \in A$ si dice f-*fondato* se appartiene ad ogni f-saturato

Ovviamente se C é f-transitivo e g é f-costruttiva $g_{|C}$ é $f_{|C}$-costruttiva. Non é però necessario rafforzare gli assiomi enunciati con una proprietà di estendibilità, in quanto

Lemma 1 Υ *é equivalente alle seguenti due asserzioni:*

$\Upsilon^{\star}$: $\forall f$ *e* $\forall C$ *f-transitivo ogni h* $f_{|C}$*-costruttiva si estende a g f-costruttiva*

X^t: *se f induce l'identità su T transitivo, allora esiste g f-induttiva che induce l'identità su T.*

Lemma 2 *Sia* A_f *l'insieme degli elementi f-fondati di A. Allora esiste un'unica funzione* $f_{|A_f}$*-costruttiva.*

Ne segue, in particolare, che Υ_i é inconsistente; nelle considerazioni seguenti verrà sostituito con X_i^t, che invece é consistente e, per il Lemma 1, possiede la forza voluta.

2. Il metodo delle relazioni f-ammissibili

Esponiamo qui una tecnica di costruzione di modelli interni della teoria degli insiemi, che generalizza quello delle permutazioni dell'universo; essa é alla base delle prove del paragrafo successivo.

Nel seguito si consideri fissata $f: A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Sia $\mathcal{E}(A)$ l'insieme delle equivalenze su A.

Per $R \in \mathcal{E}(A)$ sia $\tilde{R}$ definita da $x \tilde{R} y$ sse

$\forall s \in f(x)\ \exists t \in f(y)\ sRt$ e $\forall t \in f(y)\ \exists s \in f(x)\ tRs$

Def.3 R si dice f-*compatibile* (risp. f-*conservativa*, f-*ammissibile*) se $\tilde{R} \subseteq R$ (risp. $\tilde{R} \supseteq R$, $\tilde{R} = R$).

Lemma 3 $\sim$ *é un operatore monotono sul reticolo completo* $\mathcal{E}(A)$. *Quindi le equivalenze f-ammissibili sono un reticolo completo dotato di min* $\equiv_f$ *e max* $\approx_f$.

Poiché R é f-ammissibile se e solo se ogni sua restrizione ad insiemi f-transitivi lo é, é possibile estendere definizioni ed il Lemma 3 al caso in cui A sia una classe propria.

Teorema 1 *Se E é un'equivalenza f-ammissibile esiste una unica* $\bar{f}$ *t. c. il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(A) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{p}} \\ \bar{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{P}(\bar{A}) \end{array}$$

(ove $p: A \to \bar{A} = A/_E$ *é l'applicazione canonica)*

commuti. Inoltre $\bar{f}$ *é iniettiva.*

Teorema 2 *Se* $\bar{f}$ *é surgettiva si ottiene un modello* $\bar{A}$ *di*

ABC *ponendo:* $\mathit{Classi}^{A} = \mathit{sottoinsiemi\ di}\ \bar{A}$

$\mathit{Insiemi}^{A} = \mathit{elementi\ di}\ \bar{A}$

$x \overset{A}{\in} y$ *sse* $y \in \bar{A}$ *ed* $x \in \bar{f}(y)$ *ovvero* $y \notin \bar{A}$, $y \subseteq \bar{A}$, $x \in y$.

Teorema 3 *Ogni funzione f-induttiva induce un'equivalenza f-ammissibile. Viceversa vale*

X_1 *sse l'unica relazione f-ammissibile indotta é* $\approx_f$

X_i *sse ogni relazione f-ammissibile é indotta;*

X *sse* $\approx_f$ *é indotta.*

3. Il teorema principale

Ponendoci nella teoria di Gödel-Bernays é possibile formulare gli assiomi precedenti per classi: ci riferiremo a tali generalizzazioni sovrapponendo una barra al nome del corrispondente assioma.

I principali risultati di [3] e [4] sono riassunti nel teorema seguente ove con ABC si indicano i gruppi di assiomi della teoria di Gödel-Bernays (cfr. [2]) e N é l'assioma di von Neumann $V \simeq Ord$.

TEOREMA *In* ABCN *valgono le implicazioni del seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \bar{Y}_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \bar{Y} \arrow[r, leftrightarrow, dashed] \arrow[d] & Y \arrow[d] & X_i^t \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
X_1 \arrow[r, leftrightarrow] & Y_1 & \bar{X} \arrow[r] & X & X_i \arrow[l] & \bar{X}_i \arrow[l] \arrow[lll, dashed, bend left]
\end{tikzcd}$$

Nessuna freccia si può invertire e solo le composizioni si possono aggiungere: in particolare tutti gli assiomi sono consistenti relativamente ad ABCN. *Le frecce a tratto intero valgono già in* ABC.

Nota : Dalla dimostrazione segue che restringendosi al linguaggio di ZF si ottengono teorie che sono tutte estensioni essenziali l'una dell'altra.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boffa M. - Forcing et négation de l'axiome de fondement. Mem. Acad. Royale Belg. (1972)

[2] Boffa M. - Sur la théorie des ensembles sans axiome de fondement. (1969) Boll. Soc. Math. Belg. 21, 16-56

[3] Forti M. - Honsell F. - Comparison of the Axioms of local and global Universality. (in corso di pubblicazione)

[4] Forti M. - Honsell F. - Set Theory with Free Construction Principles. (in corso di pubblicazione)

[5] Hajek P. - Modelle der Mengenlehre, in denen Mengen gegebener Gestalt existieren. (1965) - Zeitschr. math. Log. Grundl. Math. 11, 103-115

[6] Lévy A. - A Hierarchy of Formulas in Set Theory. Memoir. Amer. Math. Soc. 57 (1965)