Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

RICORSIVITA' E CONTINUITA': UN'INTRODUZIONE

G.LONGO (PISA)

Questa brevissima esposizione è intesa ad accennare al ruolo avuto, nello sviluppo della ricorsività nei tipi, di proprietà topologiche e d'ordine. Una impostazione semplice ed elegante, sia pur non del tutto generale, di tale settore della teoria della ricorsività, è dovuta a Scott. L'approccio di Scott "sintetizza" le idee di Ershov(1) ed Hyland [1979], pure ispirate a lavori di Scott del 69-70 (v.Scott [1972]).

Credo che si debba far risalire la prima utilizzazione di proprietà topologiche in teoria della ricorsività all'ormai classico lavoro di Myhill e Shepherdson nel primo volume di Zeit. Math.Logik (1955). In effetti la topologia, implicita nel loro risultato, è stata definita solo successivamente (v.Nerode [1957] o, con più generalità, Scott [1972], Gierz et al.[1981]).

0 Def (T_S) Sia $(P,\leq)$ un ordine parziale completo (o.p.c.) . $A\subseteq P$ è aperto (di Scott) se:

1) $x\in A$ e $x\leq y \Rightarrow y\in A$

2) Se $B\subseteq P$ è una catena e $\sup B\in A$, $B\cap A\neq\emptyset$.

Dati P_0 e P_1 o.p.c., si ordinino per punti $P_0 \times P_1$ e $C(P_0,P_1)=$ $=\{f:P_0 \to P_1 / f \text{ continua}\}$ e si dia loro la topologia di Scott (per raffronti con le topologie prodotto, v. i lavori citati o Longo [1979] e Bosisio [1982]).

Una base per T_S su $P\omega$, le parti dei naturali, è data dalla collezione degli $\{B\in P\omega / A\subseteq B\}$, A finito, più il vuoto.

---

(1) - Per un'introduzione ai lavori di Ershov e per raffronti con altri approcci, si veda Longo [1979]. Le nozioni di Scott sono in un recente dattiloscritto.

Sia $\{\varphi_i\}_{i\in\omega} = \mathcal{PR}$ una gödelizzazione delle funzioni ricorsive parziali, allora $f:\omega \to \omega$ è <u>estensionale</u> se ($\varphi_i = \varphi_j \Rightarrow \varphi_{f(i)} = \varphi_{f(j)}$). Si osservi che, data $<,>:\omega^2 \to \omega$ biunivoca, ogni $f:\omega \to \omega$ (parziale) può essere considerata un elemento di $P\omega$.

1 <u>Teor</u> (M-S,$\Rightarrow$) Se f è una funzione ricorsiva totale estensionale, allora $\Phi(\varphi_i) = \varphi_{f(i)}$ è continuo (rispetto la topologia indotta su $\mathcal{PR} \subseteq P\omega$).

Trovo questa prima correlazione, fra ricorsività e continuità, sorprendente. Vale anche un viceversa (ristretto;v.poi per la nozione di funzionale ricorsivo o, più in dettaglio, Rogers [1967]). Da M-S segue l'esistenza non solo di punti fissi (ricorsione, Kleene), ma anche di minimi punti fissi.

Proprietà topologiche hanno quindi, avuto un ruolo sin dall'inizio in ricorsività nei tipi : in particolare dànno caratterizzazioni per oggetti di tipo 2 (i funzionalí ricorsivi)(1). Non solo, ma, per rimanere al livello di trasformazioni di funzioni in funzioni, possono essere utilizzate anche per studiare la ricorsività relativa (v.Barendregt-Longo [1981]).

Evidentemente, quando si parla di "continuità", si pensa subito alla nozione di "approssimazione", di intorno... E' da qui che prende spunto Scott.

2 <u>Def</u> Sia A un insieme non vuoto. $D \subseteq PA$ è un <u>sistema di intorni</u> se

1) $A \in D$

2) $X,Y,Z \in D$ e $Z \subseteq X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \in D$.

---

(1) - Per una bibliografia di ricorsività nei tipi supériori e delle sue applicazioni fondazionali, si veda Longo [1979] (lavori di Kleene, Kreisel, Gödel, Gandy, Troelstra....).

Sia $|D|$ la collezione dei filtri (non banali) di D. Chiameremo $|D|$ un <u>dominio</u>. ($|D|$,$\subseteq$) è un ordine parziale completo. Se $X \in D$, $\uparrow X \in |D|$ è il filtro principale di D generato da X. I filtri $\uparrow X$ svolgono in $|D|$ il ruolo degli insiemi finiti in $P\omega$. Infatti per $d \in D$, $d = \cup\{\uparrow X / \uparrow X \subseteq d\}$, esattamente come ogni $B \in P\omega$ è approssimato dalle sue parti finite. Come in α-ricorsività la nozione di α-finitezza è chiave,così in ricorsività nei tipi è basilare la generalizzazione,in ogni tipo, della nozione di oggetto finito.

Dati $A_0, A_1 \ldots$, siano $D_0, D_1 \ldots$ sistemi di intorni su $A_0, A_1 \ldots$.

3 <u>Def</u> $f \subseteq D_0 \times D_1$ è una <u>relazione approssimabile</u> se

1) $A_0 f A_1$

2) XfY e $XfY' \Rightarrow Xf(Y \cap Y')$

3) XfY e $X' \subseteq X$ e $Y \subseteq Y' \Rightarrow X'fY'$

(si noti il verso di "$\subseteq$" in 3 e si "pensi" ad f come funzione di dominio X e target Y).

Poniamo $A_{01} = \{f \subseteq D_0 \times D_1 / f$ è approssimabile$\}$ e $C(|D_0|,|D_1|) = \{g:|D_0| \to |D_1| / g$ è continua$\}$.

Data $f \in A_{01}$, sia $\hat{f}:|D_0| \to |D_1|$ definita da $\hat{f}(d) = \{Y / \exists X \in d \; XfY\}$: per $d \in |D_0|$, $\hat{f}(d)$ è in effetti un filtro.

Data $g \in C(|D_0|,|D_1|)$, sia $\check{g} \subseteq D_0 \times D_1$ tale che $X\check{g}Y$ sse $Y \in g(\uparrow X)$.

Vale allora:

4 <u>Lemma</u> $\hat{\ }: A_{01} \to C(|D_0|,|D_1|)$ è una corrispondenza biunivoca con inversa $\vee$.

Il teor.7 dimostrerà che anche $C(|D_0|,|D_1|)$ è un dominio (su un opportuno sistema di intorni).

5 <u>Def</u> $(\overline{D_0 \to D_1}) \subseteq PA_{01}$ è la collezione delle intersezioni finite di parti di A_{01} del tipo $[X,Y] = \{f \in A_{01} / XfY\}$.

Va da sè che $(D_0 \to D_1)$ è un sistema di intorni.

Data $f \in A_{01}$, sia $d_f = \{E \in (D_0 \to D_1) / f \in E\}$. Viceversa, se $d \in |(D_0 \to D_1)|$, sia f_d definita da $X f_d Y$ sse $[X,Y] \in d$. Di certo $d_f \in |(D_0 \to D_1)|$ e $f_d \in A_{01}$.

6 Lemma $f \longmapsto d_f$ da A_{01} in $|(D_0 \to D_1)|$ è una corrispondenza biunivoca con inversa $d \longmapsto f_d$.

7 Teor $C(|D_0|,|D_1|)$ e $|(D_0 \to D_1)|$ sono isomorfi (come ordini parziali completi, con T_S).

Dim $\hat{f} \leftrightarrow f \leftrightarrow d_f$ è tale che $\hat{f} \leq \hat{g}$ sse $d_f \subseteq d_g$. ⊠

E' facile dimostrare che anche $|D_0| \times |D_1|$ è un dominio. In effetti la categoria dei domini è Cartesiana Chiusa ed è una sottocategoria della categoria degli ordini parziali completi.

Si osservi che in un dominio $(|D|, \subseteq)$ l'ordine parziale non è definito assiomaticamente (cf.Ershov), ma è la vecchia buona inclusione insiemistica, con tutte le sue proprietà. E questo è molto bello.

Ricorsività

C'è un'introduzione ed un metodo comune nei diversi approcci alla ricorsività nei tipi che fan uso di proprietà topologiche (e.g. Kreisel, Ershov, Hyland...). Si tratta di una tecnica non infrequente in matematica: conoscendo la ricorsività su ω, funzioni ed insiemi ricorsivi, grazie a proprietà locali (di approssimazione, intorni...) si definisce la ricorsività in spazi astratti. Sperando che il parallelo non sembri troppo audace, si potrebbe dire che qualcosa di analogo accade nello studio delle varietà differenziabili. Nota la differenziabilità in R^n, con mappe, carte locali si definisce la differenziabilità in spazi più generali.

Sia D_0 un sistema di intorni numerabile (ed enumerato).

8 Def D_0 è effettivo se

1) $X_n \cap X_m = X_k$ è ricorsivo in n, m, k

2) $\exists i\ X_i \subseteq X_n \cap X_m$ è ricorsivo in n, m.

9 Def $d \in |D_0|$ è calcolabile se $\{n / \uparrow X_n \subseteq d\} = \{n / X_n \in d\}$ è ricorsivamente enumerabile (r.e.). (Scriveremo $d \in |D_0|_c$).

Quindi d è calcolabile se la famiglia degli intorni che approssimano d, i.e. $\{n / d \in \uparrow(\uparrow X_n)\}$, è r.e..

10 Def Siano D_0, D_1 effettivi. Allora $f \in A_{01}$ è calcolabile se $\{\langle n,m \rangle / X_n f Y_m\}$ è r.e..

In virtù del lemma 4, diremo $\hat{f} \in C(|D_0|,|D_1|)$ calcolabile se lo è $f \in A_{01}$ (scriveremo $f \in C(|D_0|,|D_1|)_c$).

Ora, la categoria dei domini effettivi è Cartesiana Chiusa. Quindi la nozione di oggetto calcolabile si propaga nei tipi. E coerentemente:

11 Teor $d \in |(D_0 \to D_1)|_c$ sse $f_d \in A_{01}$ è calcolabile (i.e.sse $\hat{f}_d \in C(|D_0|,|D_1|)_c$).

Un oggetto "funzionale", dunque, è calcolabile, come elemento del proprio dominio, sse lo è come funzione (relazione approssimabile).

La seguente estensione del teorema 1 (M-S), basata su una idea di Ershov, è di Henk Barendregt e di chi scrive, in una lettera a Scott.

12 Lemma Sia $\hat{f} \in C(|D_0|,|D_1|)_c$. Allora range$(\hat{f} \upharpoonright |D_0|_c) \subseteq |D_1|_c$.

E' facile enumerare $|D|_c$, se D è enumerato (il principal computable numbering di Ershov). Siano ν e μ enumerazioni di $|D_0|_c$ e $|D_1|_c$.

13 Teor (M-S, per domini) $\hat{f}\in C(|D_0|,|D_1|)_c$ sse esiste φ ricorsiva totale (estensionale in ν e μ) tale che $\hat{f}(\nu(i))=\mu(\varphi(i))$. (La dimostrazione si basa su di un risultato in Giannini, Longo [1980]).

Torniamo ora ad M-S classico. Come invertire l'implicazione? $P\omega$ non è un dominio (semmai lo è $|P\omega|$..), quindi il teor.1 non è un'istanza del teor.13.

Bene, per dimostrare il "viceversa" di M-S occorre e basta costruire un modello del λ-calcolo su $P\omega$.

Un λ-modello (v.Hindley, Longo [1980]) è innanzitutto una struttura moltiplicativa $(L,\cdot)$. "$\cdot$" interpreta l'applicazione formale del λ-calcolo.

14 Def Sia $\{E_n\}_{n\in\omega}$ una enumerazione delle parti finite di ω. Si definisca "$\cdot$": $P\omega^2 \to P\omega$ con

$$A\cdot B = \{m/\ \exists E_n\subseteq B \quad \langle n,m\rangle\in A\}.$$

Per interpretare l'operatore di astrazione λx.... in L, è necessario immergere uno spazio "sufficientemente ricco" di funzioni (v.Meyer [1981]), di L in L, in L stesso. Ovvero far "collapsare" i tipi, ad un qualche livello. E questo correla le strutture di tipi con il λ-calcolo, che è eminentemente type-free.

15 Teor (Scott) Esiste $\underline{\lambda}:C(P\omega,P\omega)\to P\omega$ t.c.:

1) $\underline{\lambda}(\Phi)\cdot B=\Phi(B)$

2) Se $\Psi\in C(P\omega^2,P\omega)$, la funzione $\Phi(B)=\underline{\lambda}(\Psi(-,B))$ è in $C(P\omega,P\omega)$.

Dim $\underline{\lambda}(\Phi)=\{\langle n,m\rangle/m\in\Phi(E_n)\}$. ⊠

16 Def $\Phi\in C(P\omega,P\omega)$ è un funzionale parziale ricorsivo se $\underline{\lambda}(\Phi)$ è r.e..

17 Teor (M-S, $\Leftarrow$) Se Φ è un funzionale (parziale) ricorsivo, allora esiste f ricorsiva (parziale) estensionale t.c. $\Phi(\varphi_i)=\varphi_{f(i)}$.

Fissata la struttura moltiplicativa $(L,\cdot)$, se $(L,\cdot,\underline{\lambda})$ è un λ-modello, diremo che $(L,\cdot,\underline{\lambda})$ è una λ-espansione (di $(L,\cdot)$).

Si osservi che, per il teor.15.(1), $\underline{\lambda}$ è iniettiva: $\underline{\lambda}$ sceglie, per ogni ϕ, un "rappresentante" di Φ in $P\omega$. $\underline{\lambda}$ è ben lungi dall'esser suriettiva. Eppure proprietà di continuità di $\underline{\lambda}$ danno il seguente risultato

18 Teor (K.Bruce, G.Longo [1982]) Esiste un'unica λ-espansione di $(P\omega,\cdot)$.

Negli altri modelli di Scott, che sono estensionali (ogni Φ ha un unico "rappresentante"), questa unicità è banale. Concludiamo con un excursus che, fra l'altro, risponde ad una domanda naturale.

Il λ-calcolo non è completo e non ha modelli finiti. Il teorema di Łos-Vaught assicura che in ogni cardinalità ammette modelli non elementarmente equivalenti. Vale in effetti il seguente rafforzamento (alcune f.b.f. sono equazioni):

19 Teor (Longo [1982]) Per ogni cardinale α, esiste $(L,\cdot)$, di cardinalità α, che ammette λ-espansioni non equazionalmente equivalenti.

I modelli non elementarmente equivalenti si possono, cioè, dare sulla stessa struttura moltiplicativa (che ammette quindi λ-espansioni diverse).

D'altra parte:

20 Teor (Longo [1982]) Per ogni cardinale α, esiste (L,·) non estensionale, di cardinalità α, con un'unica λ-espansione.

In quest'ultimo risultato le proprietà di continuità giocano un ruolo essenziale.

Riferimenti

Barendregt H., Longo G. [1981]. Recursion Theoretic Operators and morphisms of Numbered Sets. Tech.Rep. 194, LCS-M.I.T. (di pros.pub.in Fundamenta Mathematicae).

Bosisio A. [1982] (in preparazione da) Tesi di Laurea. Istituto Matematico. Pisa, 1979.

Bruce K., Longo G. [1982]. A note on Combinatory Algebras and their expansions. Proceedings ICALP, Aarhus, Danmark, July 1982.

Giannini P., Longo G. [1980]. Effectiveness in some f-spaces. Nota ISI S-80-4.

Gierz A. et al [1981]. A Compendium on Continuous Lattices. Springer Verlag.

Hindley R., Longo G. [1980]. Lambda Calculus Models and Extensionality. Zeit. Math. Logik, 26, pp.289-310.

Hyland M. [1979]. Filter Spaces and Continuous Functionals. Annals of Math.Logic, 16, pp.101-143.

Longo G. [1979]. Ricorsività nei tipi superiori: un'introduzione alle caratterizzazioni di Ershov ed Hyland. Rend.Sem.Mat. Torino, 37, 3, pp.1-29.

Longo [1982]. Set-theoretical models of lambda calculus: Theories, Expansions, Isomorphisms. Tech.Rep. LCS-M.I.T. (in preparazione).

Meyer A. [1981]. What is a modell of λ-calculus? (Expanded Version) Tech.Rep. LCS-M.I.T., June 1981.

Nerode A. [1957]. General Topology and Partial Recursive Functionals. Summer Inst.Sym.Logic, Cornell Univ.

Rogers H. [1967]. Theory of recursive functions and of effective computability. McGraw Hill.

Scott D.S. [1972]. Continuous Lattices. In Toposes and Logic (Lawvere, ed.), LNM 274, Springer-Verlag, pp.97-136.

Desidero ringraziare, fra tanti, soprattutto Henk Barendregt, Ennio de Giorgi, Roger Hindley, Albert Meyer, Marco Forti. Li ringrazio qui non per specifici "fatti tecnici" (cui pure abbiamo lavorato o stiamo lavorando), ma perchè il discuter con loro/in questi anni, capire i loro modi di vedere, spesso così diversi, mi ha insegnato, mi sta insegnando, come "guardar" la matematica. E quanto bello e gioioso possa essere il pensare in matematica.

Il vivace dissenso epistolare di Dana Scott da una nozione di Roger Hindley e mia, i commenti successivi, il suo incoraggiamento sono anche stati, per me, estremamente impartanti.