Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

DECIDIBILITA' E VALIDITA', IN PRESENZA DI OPERATORI DI SCELTA.

E.G.Omodeo - Tema SpA,BO - Un. di UD

Affiancando $\{t : y \in x\}$, ηt, $Hx\ p$ ai costrutti insiemistici soliti e richiedendo che

$$j \in \{t : y \in x\} \leftrightarrow \exists y \in x \quad j=t \quad ,$$

$$t=\emptyset \ \vee . \ \eta t \in t \ \& \ t \cap \eta t = \emptyset \quad ,$$

$$Hx\ p = \emptyset \ \& \ \neg \exists x\ p \ . \vee \exists x . \ p \ \& \ \{x\} = Hx\ p,$$

saremo esentati dal postulare assiomi di scelta, fondazione e sostituzione, visto che $\{\eta y : y \in x\}$ denota un insieme di scelta di un qualunque x, e che

$$\bigcup \{Hj\ \forall y . \ p \leftrightarrow y=j \ : \ a \in x\}$$

è uno z tale che

$$j \in z \leftrightarrow \exists a \in x \ \forall y . \ p \leftrightarrow y=j \quad .$$

Mentre ci accingiamo ad erigere una teoria degli insiemi su questo linguaggio, scopriamo non meno di tre accezioni dei concetti di validità e soddisfacibilità delle formule, causa la semantica di η, H che è solo parzialmente definita. Ad esempio la formula

$$\eta x \ , \eta y \in x \cap y \ \& \ \eta x \neq \eta y$$

è soddisfacibile in senso debole; ma basta che imponiate

$$y \in x \rightarrow \eta \emptyset = \emptyset < x \ni \eta x \leq y < x,$$

ove $x < y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} y \neq \eta\{x,y\}$,

e vi diventa insoddisfacibile.

Il nuovo vincolo fa di $<$ un buon ordinamento della totalità degli insiemi rispetto al quale $\eta x = \min x$ per $x \neq \emptyset$. Fonde in una le diverse nozioni di soddisfacibilità, riferite a formule che non impieghino, oltre ai connettivi a $\emptyset$ ed alle variabili, altri costrutti che $\in$, $=$ ed η. Un algoritmo consente ora di determinare, di una qualsiasi di queste formule, se sia valida o meno. Viene spontaneo istituire fra H ed η la correlazione

$$p \ \& \ y \in Hx \ p \longrightarrow y \leqslant x \quad .$$

Forzando η ancor più, esigiamo che

1. $x \subsetneqq y \rightarrow x < y$,
2. $x \setminus y < y \setminus x \rightarrow x < y$,
3. $x = u \cup v \ \& \ u,v < y \ \& \ x \cap y = \emptyset \rightarrow x < y$,
4. $x \nsubseteq y \nsubseteq x \rightarrow . \ x < y \leftrightarrow \max(x \setminus y) < \max(y \setminus x)$

per x, y finiti, cosicché la formula

$$\exists x,y \ \ \eta x \supsetneqq y \in x$$

esprima concisamente l' esistenza di insiemi infiniti. A questo punto sono computabili, sugli insiemi ereditariamente finiti, sia $<$ che η. Vengono a combaciare, e ad essere decidibili, la soddisfacibilità finita con quella ereditariamente finita, riferita a formule che non coinvolgano altri costrutti che quelli di dianzi più $\subseteq, \cap, \setminus, \cup$ (per catturare $\subseteq$ e $\cap$ ci basta la 1; per $\setminus$ e $\cup$, servono anche la 2, la 3. Congetturiamo che 4 renda decidibile la soddisfacibilità finita anche in presenza di enumerazioni finite $\{t_1 , \dots , t_n\}$.

L' aggiunta di ulteriori vincoli potrà forse farci progredire; non mai caratterizzare η in modo univoco. Stiamo dunque intraprendendo un' esplorazione assai vasta da cui potrebbe emergere un teorema analogo a quello di Herbrand.

Desidero ringraziare: in Jacob T. Schwartz l' ispiratore, in Alfredo Ferro il collaboratore indispensabile.