Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

UN MODELLO PER LA TEORIA INTUIZIONISTA DEGLI INSIEMI

GIUSEPPE ROSOLINI

Presenteremo un modello di realizzabilità per la teoria intuizionista IZF degli insiemi e proveremo che in esso la classe degli ordinali tricotomici è un insieme. Lo studio, suggerito dal Prof. D.S.Scott, è stato compiuto da D.C.McCarty e dall'autore a Oxford nell'a.a. 1980-81.

1. Il modello. E' essenzialmente quello studiato da Scedrov in [3], ma è costruito in modo tale che la relazione naturale di appartenenza risulti estensionale. Ci siamo valsi per questo delle idee esposte in [2] ed [1].

Sia N l'insieme dei numeri naturali; se n è in N, n_0 ed n_1 ecc. indicheranno le proizioni canoniche ed $\{n\}$ la funzione ricorsiva parziale codificata da n. Prima di definire il modello R, ricordiamo con quali clausole si estende la realizzabilità alle formule non atomiche. Siano A e B formule e sia $\bar{a}$ una stringa di elementi di R. Si dirà che un numero naturale realizza una formula composta come segue:

$n\underline{r}A\wedge B[\bar{a}]$ sse $n_0\underline{r}A[\bar{a}]$ & $n_1\underline{r}B[\bar{a}]$;

$n\underline{r}A\vee B[\bar{a}]$ sse $n_0=0 \Rightarrow n_1\underline{r}A[\bar{a}]$ & $n_0\neq 0 \Rightarrow n_1\underline{r}B[\bar{a}]$;

$n\underline{r}A\rightarrow B[\bar{a}]$ sse $\forall m\in N[m\underline{r}A[\bar{a}] \Rightarrow \{n\}(m)\downarrow \& \{n\}(m)\underline{r}B[\bar{a}]]$;

$n\underline{r}\neg A[\bar{a}]$ sse $\forall m\in N.\ m\not{\underline{r}}A[\bar{a}]$;

$n\underline{r}\forall xA[\bar{a}]$ sse $\forall b\in R.\ n\underline{r}A[\bar{a}][b/x]$;

$n\underline{r}\exists xA[\bar{a}]$ sse $\exists b\in R.\ n\underline{r}A[\bar{a}][b/x]$.

Notazione. Per $X,Y\subseteq N$, $n\in N$, scriveremo $A\overset{n}{-}B$ a significare che $X\subseteq\{n_0\}^{-1}(Y)$ ed $Y\subseteq\{n_1\}^{-1}(X)$.

Definizione. Il modello R è la classe di tutte le funzioni parziali $a:R \overset{o}{\to} P_* N$ nelle parti non vuote di N tali che

(i) $\forall b,c \in R\ \forall m \in N\ [m\underline{r}b=c \Rightarrow [b \in \mathrm{dom}\ a \Leftrightarrow c \in \mathrm{dom}\ a]]$;

(ii) $\exists t \in N\ \forall b,c \in R\ \forall m \in N\ [m\underline{r}b=c \Rightarrow \{t\}(m){\downarrow}\ \&\ a(b) \xrightarrow{\{t\}(m)} a(c)]$;

dove $m\underline{r}b=c$ sta per $m\underline{r}\forall x\,[x \in b \longleftrightarrow x \in c]$ ed $n\underline{r}d \in b$ sta per $d \in \mathrm{dom}\ b\ \&$ $\&\ n_0 \in b(d)\ \&\ \forall d' \in R\ \forall k \in N\ [k\underline{r}d=d' \Rightarrow \{n_1\}(k){\downarrow}\ \&\ b(d) \xrightarrow{\{n_1\}(k)} b(d')]$.

Ovviamente la definizione è viziosa, ma lasciamo il compito di precisare i dettagli della corretta definizione cumulativa a chi è interessato.

Le due clausole per formule atomiche scritte più sopra completano la definizione di realizzazione del linguaggio del primo ordine con simboli $\in$, $=$. Si dice che un enunciato A è <u>realizzato nel modello</u> R se esiste un numero naturale che lo realizza e scriveremo $R \models A$.

<u>Teorema.</u> Tutti gli assiomi di IZF sono realizzati in R: quelli comprendendo assiomi logici per un calcolo intuizionista e gli assiomi di estensionalità, separazione, coppia, unione, potenza, infinito, $\in$-induzione e collezione.

Per la dimostrzione avvisiamo soltanto il lettore che l'unica difficoltà sorge quando si deve realizzare l'assioma di $\in$-induzione.

Notiamo che i numeri naturali di R sono definiti come: $\underset{\sim}{0}$ è la funzione vuota; $\underline{n+1}(c)=\{m \in N: m\underline{r}c=\underline{0} \vee \ldots \vee c=\underline{n}\}$. E' facile provare che, se $k\underline{r}\underline{n}=\underline{m}$, allora $n=m$. Inoltre l'"insieme di tutti i naturali" è ω definito da $\omega(c)=\{\langle n,m\rangle : m\underline{r}c=\underline{n}\}$.

2. <u>La realizzabilità trasferita nel modello.</u> Si supponga dato un elemento a di R. Si può definire una relazione in R da a in ω ovunque definita su a che correla un elemento di a ed un numero che realizza la sua appartenenza ad a. Più precisamente sia $F:R^2 \to P_* N$ definita da

$$F(b,c)=\{\langle n,k,m\rangle : \exists d \in R\ [n\underline{r}d \in a\ \&\ k\underline{r}d=b\ \&\ m\underline{r}c=\underline{n}]\}.$$

Si prova che F è un insieme e definisce un elemento di R tale

che $s\underline{r}F \subseteq a \times \omega \wedge \forall x \in a\ \exists y. \langle x,y\rangle \in F$, per un opportuno s in N che non dipende da a(ci scusiamo con il lettore se, per mancanza di spazio, tralasciamo la prova della affermazione precedente che pure è essenziale per quanto segue; speriamo che lo trovi un interessante esercizio). Da questo si ottiene che esiste f in R tale che $t\underline{r}f:a \to P_* \omega$ per un opportuno t che non dipende da a, dove $P_* \omega$ è l'insieme in R delle parti abitate di ω.

3. <u>Gli ordinali tricotomici in R.</u> Prima un po' di nomenclatura: $\mathrm{Trans}(x)$ sta per $\forall y \in x \forall z \in y. z \in x$; $\mathrm{Ord}(x)$ sta per $\mathrm{Trans}(x) \wedge \forall y \in x. \mathrm{Trans}(x)$; $\mathrm{Tri}(x)$ sta per $\mathrm{Ord}(x) \wedge \forall y,z \in x\ [y \in z \vee y=z \vee z \in y]$.

Si vuole provare che

$$R \models \forall x\ [\mathrm{Tri}(x) \to \exists f\ [f:x \to P_* \omega \wedge \forall y,z \in x\ [\exists w. w \in f(y) \cap f(z) \to y=z]]].$$

Sia dunque a in R e si prenda f come definita al §2. Si deve trovare un numero p in N che non dipenda da a tale che

$$\forall m \in N\ [m\underline{r}\mathrm{Tri}(a) \Rightarrow \{p\}(m){\downarrow}\ \&\ \{p\}(m)\underline{r}\forall y,z\,[y \in a \wedge z \in a \wedge \exists w. w \in f(y) \cap f(z) \to \to y=z]].$$

Si supponga che $m\underline{r}\mathrm{Tri}(a)$. Allora

$$\forall b,c \in R\ \forall i \in N\ [i\underline{r}b \in a \wedge c \in a \Rightarrow \{m\}(i){\downarrow}\ \&\ \begin{array}{l} \{m\}(i)_0=0 \Rightarrow \{m\}(i)_1\underline{r}b \in c \\ \{m\}(i)_0=1 \Rightarrow \{m\}(i)_1\underline{r}b=c \\ \{m\}(i)_0 \neq 0,1 \Rightarrow \{m\}(i)_1\underline{r}c \in b \end{array}].$$

Si supponga inoltre che $n\underline{r}b$ a e $k\underline{r}c$ a ed esista d in R tale che $\langle \ell,j\rangle\ \underline{r}d \in f(b) \cap f(c)$. Dalla definizione di f, si può supporre che $\langle \ell,j\rangle \underline{r}F(b,d) \wedge F(c,d)$. Dunque ci sono b' e c' in R tali che $\ell_0\underline{r}b' \in a\ \&\ \ell_1\underline{r}b'=b\ \&\ \ell_2\underline{r}d=\underset{\sim}{\ell_0}\ \&\ j_0\underline{r}c' \in a\ \&\ j_1\underline{r}c'=c\ \&\ j_2\underline{r}d=\underset{\sim}{j_0}$. Allora $\ell_0=j_0$. Del resto, deve essere $\{m\}(\langle \ell_0,\ell_0\rangle)_0=1$, perciò $\{m\}(\langle \ell_0,j_0\rangle)_0=1$. Dunque $\{q\}(\langle \ell_1,\{m\}(\langle \ell_0,j_0\rangle)_1,j_1\rangle)\underline{r}b=c$, dove q realizza $\forall x,y,z,w\ [y=x \wedge y=z \wedge z=w \to x=w]$. Si definisca p con

$$\{\{p\}(m)\}(\langle n,k,\langle \ell,j\rangle\rangle)=\{q\}(\langle \ell_1,\{m\}(\langle \ell_0,j_0\rangle)_1,j_1\rangle).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M.P.FOURMAN, Sheaf models for set theory, J.PureAppl. Alg. 19(1980), 91-101.

[2] J.M.E.HYLAND, P.T.JOHNSTONE, A.M.PITTS, Tripos theory, Math.Proc.Camb.Philos.Soc. 88(1980), 205-232.

[3] A.SCEDROV, Untitled mimeographed notes.