Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

TEORIA DEI MODELLI PER UNA CLASSE DI ANELLI DIFFERENZIALI

Carlo Toffalori (Firenze)

Nel seguito, si intende per anello un anello commutativo unitario. Sia T_D la teoria degli anelli differenziali R tali che:

1. per ogni $r \in R$, $r^2 = 0$ oppure r è invertibile;
2. $(\mathrm{rad}\ R)^2 = (0)$;
3. esiste un endomorfismo differenziale idempotente f di R tale che il nucleo di f coincide con rad R.

Un linguaggio del 1° ordine per la teoria T_D è $L = (+, \cdot, -, D, f, 0, 1)$ (D è il simbolo funzionale corrispondente alla derivazione in R). Si ha:

4. f(R) è un campo differenziale, e car R = = car f(R);

5. R è un anello locale; il suo ideale massimale M_R coincide con rad R ed è un ideale differenziale, così che il campo residuo R/M_R è un campo differenziale isomorfo a f(R).

Intuitivamente, se $R \models T_D$, R ha uno scheletro f(R) di campo differenziale; se $k \in f(R)$, k è circondato da una corona $k + M_R$ di elementi che si possono supporre infinitamente vicini a k, rispetto alla idea ingenua degli infinitesimi come elementi dal prodotto trascurabile (Lawvere).

Si intendono esporre le proprietà di teoria dei modelli per T_D. Il collegamento, evidente, è con i concetti di campo differenziale, campo differenzialmente chiuso, chiusura differenziale di un campo differenziale (A. Robinson, L. Blum, C. Wood). Si noti che, se $R \models T_D$, $f(R)$ è un campo differenziale, M_R è uno spazio vettoriale su $f(R)$ (ed anzi è un'algebra banale). Se poi $a \in M_R$, è $D(a) \in M_R$, perciò, se $B = \{a_\nu\}_{\nu<\alpha}$ è una base di M_R su $f(R)$, allora, per ogni $\nu < \alpha$, si ha

$$D(a_\nu) = \sum_{\mu<\alpha} t_{\nu\mu} a_\mu$$

con $t_{\nu\mu} \in f(R)$ opportuni, $t_{\nu\mu} = 0$ q.o. $\mu > \alpha$. Insiemisticamente, R si può dunque ritenere come il prodotto cartesiano $f(R) \times M_R$, sul quale $+, \cdot, -, 0, 1$, f, D sono definiti in modo opportuno (D a partire dalla derivazione di f(R) e, rispetto alla base B di M_R, dall'insieme $\{t_{\nu\mu} : \nu, \mu < \alpha\}$).

Sia $E(T_D)$ la classe delle strutture esistenzialmente chiuse di T_D.

<u>Lemma</u> - Sia $R \in E(T_D)$. Allora:

(1) f(R) è un campo differenzialmente chiuso;

(2) $M_R \neq (0)$;

(3) la dimensione di M_R su f(R) è 1, e M_R è generato su f(R) da una costante (cioè da un elemento a tale che $D(a) = 0$).

Sia T_D^* la teoria degli anelli $R \models T_D$ tali che f(R) è un campo differenzialmente chiuso, e M_R ha dimensione 1 su f(R); per $T = T_D^*$, T_D, siano poi T(0), T(p) (per p primo) le teorie dei modelli di T aventi caratteristica 0 o p.

<u>Teorema 1</u> - (1) $T_D^*(0)$ è il model-companion di $T_D(0)$ ma non il suo model-completamento;

(2) $T_D^*(0)$ non ha l'eliminazione dei quantificatori in L_D (in particolare, esiste $R \models T_D(0)$ privo di una "chiusura differenziale" in $T_D^*(0)$);

(3) $T_D^*(0)$ è ω-stabile.

Se la caratteristica è prima p, in analogia al caso dei campi definiamo anzitutto un anello $R \models T_D(p)$ differenzialmente perfetto se il campo f(R) è differenzialmente perfetto. Sia $T_D'(p)$ la teoria degli anelli $R \models T_D(p)$ differenzialmente perfetti, $T_D'(p)$ si può rappresentare in L_D o in $L_D' = L_D \cup \{\rho\}$, dove ρ è un simbolo funzionale unario così definito: se $R \models T_D'(p)$ e $r \in R$, $\rho(r) \in F(R)$ e, se $D(f(r)) = 0$, $(\rho(r))^p = f(r)$ mentre, se $D(f(r)) \neq 0$, $\rho(r) = 0$.

<u>Teorema 2</u> - (1) $T_D^*(p)$ è il model-companion di $T_D(p)$ e di $T_D'(p)$, ma non è il model-completamento nè di $T_D(p)$ nè di $T_D'(p)$;

(2) $T_D(p)$ non ha l'eliminazione dei quantificatori nè in L_D nè in L_D' (in particolare esiste $R \models T_D'(p)$ privo di "chiusura differenziale" in $T_D^*(p)$);

(3) $T_D^*(p)$ è stabile, ma non superstabile.-