Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Antonio Vincenzi

GLI ESPERIMENTI COME MACCHINE ASTRATTE

INTRODUZIONE. Questo studio si inserisce in un tentativo di precisazione formale della nozione di *"verità sperimentale"* e della logica ad essa soggiacente. Lo stile del discorso é quello della *ABSTRACT MODEL THEORY* nel senso precisato in [Mu3]: si cerca, cioé, di individuare delle *strutture sperimentali* $\mathfrak{M}_S = \langle \mathfrak{M}, \mathbb{E} \rangle$ in cui $\mathfrak{M}$ é una struttura del 1° ordine ed $\mathbb{E}$ é un *esperimento astratto*, in maniera analoga a quella per cui nozioni come *"é topologicamente vero", "é induttivamente vero",...* possono essere precisate nelle logiche relative alle *strutture topologiche, monotone,...* (v. [FZ]). Il nostro obiettivo di fondo é, perciò, quello di individuare una o più *logiche sperimentali* e di vagliare le loro caratteristiche generali. In questo concordiamo con i propositi esposti in [DT], anche se le tecniche e l'approccio da noi scelti sono differenti.

LE MACCHINE EFFETTIVE DI GANDY. Le considerazioni che hanno portato alla presente formalizzazione della nozione di *esperimento* sono, in primo luogo, il fatto per cui la gran maggioranza degli esperimenti concreti sono strutturati come segue

$$\boxed{\textit{rivelatore}} \rightarrow \boxed{\textit{codificatore}} \rightarrow \boxed{\textit{calcolatore}} \rightarrow \cdots$$

e, secondariamente, la stretta analogia concettuale tra la nozione di *algoritmo* e quella di *definizione operativa* (v. [DT] o [Br]). Ora, siccome la prima é stata precisata con grande successo tramite le macchine di Turing, era naturale cercare una classe di macchine astratte adeguate a caratterizzare la seconda. Macchine di questo tipo sono state introdotte da R. Gandy (in [Ga]). In questo lavoro ci si pone in $\mathbb{H}P(\Gamma)$ e si interpretano gli atomi di P come *pezzi* non ulteriormente divisibili, da cui i *meccanismi* sono ottenuti tramite aggregazioni stratificate. Tra essi, le *macchine effettive* sono caratterizzate (a meno di *isomorfismi costruttivi* ≅) da 4 principi che stabiliscono, sostanzialmente, che ogni macchina effettiva M può essere descritta da un insieme di *stati* S_M, da un insieme di *stati iniziali* $I_M \subseteq S_M$ e da una *funzione di transizione* $F_M: S_M \to S_M$ (1° PRINCIPIO); che M può essere smontata nei suoi pezzi in un numero finito di passaggi (2° PRINCIPIO); che essa può essere univocamente rimontata a partire da un insieme di suoi sottomeccanismi contenenti un numero di pezzi superiormente limitato (3° PRINCIPIO) ed, infine, che in M non possono avvenire azioni simultanee a distanza (4° PRINCIPIO). Queste macchine sono *"effettive"* perché per esse vale il

1. TEOREMA. *In ogni macchina effettiva M, F_M é (a meno di isomoefismi costruttivi) Turing-computabile.*

Ad ogni macchina effettiva M é, inoltre, possibile associare una *complessità* $\|M\|$ (2° PRINCIPIO) ed una *grandezza costruttiva* $|M|$ (3° PRINCIPIO).

SVILUPPI DELLA TEORIA DEI MECCANISMI. La *TEORIA DEI MECCANISMI* di Gandy é una buona candidata al ruolo di *teoria generale delle macchine che computano*, nel senso specificato in [Mo]. In questa prospettiva, date due macchine effettive M ed N, diremo che *M é immersa funzionalmente in N*, in simboli $M \rightsquigarrow N$, quando

$$\exists X \subseteq \mathrm{TC}(N) \forall x \in S_M \exists y \in S_M [F_M(x) \cong F_N(y \upharpoonright X)],$$

definiamo *composizione* di M ed N la macchina $M * N$ in cui

$$S_{M*N} = S_M \cup S_N \quad \text{e}$$

$$F_{M*N}(x) = F_M(x) \qquad \text{se } x \in S_M \setminus S_N,$$

$$= F_N(x) \qquad \text{altrimenti}$$

e *concatenazione* di M ed N, $M^\frown N$, la composizione di due macchine tali che ogni funzionamento di M porta, in un numero finito di passi, ad uno stato iniziale di N. ($\rightsquigarrow$ é una *relazione di immersione astratta* di [Mu2] e $*$ contiene tutte le usuali combinazioni di macchine definite esplicitamente). Data una classe $\mathcal{N}$ di macchine effettive, diremo che una macchina U é *$\mathcal{N}$-universale* quando, per ogni $M \in \mathcal{N}$,

$$\forall x \in I_M \exists y \in I_U [x \cong y \upharpoonright \mathrm{Sp}(\mathcal{N})] \quad \text{e}$$

$$\forall x \in S_M \exists y \in S_U [F_M(x) \cong F_U(y) \upharpoonright \mathrm{Sp}(\mathcal{N})],$$

in cui $\mathrm{Sp}(\mathcal{N})$ é l'insieme dei pezzi che appartengono alle macchine di $\mathcal{N}$. Ora, se chiamiamo *limitata* una classe di macchine effettive in cui $\|-\|$ e $|-|$ sono superiormente limitate, si ha

2. TÉROREMA. *$\mathcal{N}$ é (a meno di immersioni funzionali) una classe limitata di macchine effettive sse esiste una macchina effettiva che sia (a meno di immersioni funzionali) $\mathcal{N}$-universale.*

da cui si può ricavare buona parte della teoria della ricorsività classica e, parallelamente, i seguenti corollari:

3. COROLLARIO. *Non esiste alcuna macchina effettiva che sia universale per la classe di tutte le macchine effettive.*

4. COROLLARIO. *Se $\mathcal{N}$ é una classe limitata di macchine effettive, allora anche la classe di tutte le combinazioni finite di macchine di $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^*$ é una classe limitata di macchine effettive.*

GLI ESPERIMENTI ASTRATTI. A questo punto, ogni *esperimento astratto* $\mathbb{E}$ può essere rivisto come una macchina effettiva che soddisfi alle seguenti, ulteriori, proprietà:

RILEVAZIONE: $I_{\mathbb{E}}$ é una classe limitata di macchine effettive;

FEDELTA'.: $\mathbb{E}$ può essere simulato da ogni mecchina $I^*_{\mathbb{E}}$-universale;

COMUNICAZIONE: esiste una macchina effettiva M, concatenabile con $\mathbb{E}$ e tale che sia M che $\mathbb{E}^\frown M$ siano distinte tanto da $\mathbb{E}$ che dalle sue sottomacchine effettive.

La proprietà di rilevazione garantisce l'effettività dei fenomeni osservati. Quella di fedeltà ci assicura che $\mathbb{E}$ non può avere una potenza di calcolo superiore a quella dei suoi stati iniziali. La proprietà di comunicazione esclude, infine, la possibilità di "esperimenti" isolati ed ha delle rilevanti conseguenza sui limiti di un esperimento astratto, una volta che esso sia immerso nello spazio-tempo fisico (in accordo, ad esempio, con [Be] o [Mu3] e contro [Bn]).

RIFERIMENTI:

[Be] Bekenstein,J.D.: *Energy Cost of Information Transfer.* Phis. Rew. Letters, 46 (1981), 623-626.

[Bn] Benioff,P.: *The computer as a Physical System:...* J. Stat. Phys, 23 (1980), 563-591.

[Br] Bridgman,P.W.: *La logica della fisica moderna.* [trad. it.] Borinchieri, 1969.

[DT] Dalla Chiara,M.L.,Toraldo di Francia,G.: *Le teorie fisiche.* Boringhieri, 1981.

[FZ] Flum,J.,Ziegler,M.: *Topological Model Theory.* SLNM 769. 1980.

[Ga] Gandy,R.: *Church's Thesis and Principles of Mechanisms.* The Kleene Symposium, North Holland (1980), 123-148.

[Mo] Moschovakis,Y.N.: *Axioms for computation theories - ...* Logic Colloquium '69, North Holland, 1971, 199-255.

[Mu1] Mundici,D.: *Irreversibility, Uncertainty, Relativity and Computer Limitations.* Il Nuovo Cimento, vol. 61, 297-305.

[Mu2] Mundici,D.: *Lectures on abstract model theory I.* Quaderni dell'Istituto Matematico "U.Dini", 6 (1982).

[Mu3] Mundici,D.: *Lectures on abstract model theory II.* ibid., 7 (1982).