Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

SISTEMI DI NOTAZIONE ORDINALE E DILATORI

V.Michele ABRUSCI (Ist. di Filosofia, FI)

La Π^1_2 -logica (detta anche β - logica) è un campo d'indagine avviato recentemente da J.-Y.GIRARD [1].

Gli oggetti tipici della Π^1_2 - logica sono di complessità Π^1_2. Ad esempio: i "dilatori", ovvero i funtori da ON (categoria degli ordinali, dove i morfismi da un ordinale x a un ordinale y sono le funzioni strettamente crescenti da x a y, $\mathfrak{I}(x,y)$) a ON che commutano ai limiti diretti e ai pull-backs.

Mentre la logica usuale (Σ^0_1) considera "dimostrazioni finite" e la ω- logica (Π^1_1-logica) "ω-dimostrazioni", nella β-logica (Π^1_2-logica) si considerano "β-dimostrazioni" e si mira a caratterizzare sintatticamente il concetto di "verità in tutti i β-modelli"(modelli in cui gli ordinali vengono interpretati sugli ordinali), problema sollevato da MOSTOWSKI [2].

I dilatori, oggetti privilegiati della Π^1_2-logica, sono (rozzamente parlando)"quasi ordinali". Girard dimostra un "principio di induzione sui dilatori" e mostra che, dato un dilatore F, la classe (propria) dei suoi "predecessori" (opportunamente definiti) è bene ordinata e ha tipo d'ordine $F(\Omega)$. Poichè a ciascun ordinale x corrisponde un dilatore $\underline{x}$ ($\underline{x}(y)=x$ per ogni y, $\underline{x}(f)=E_x$ per ogni f), ed essendo Id il dilatore t.c. Id(x)=x e Id(f)=f, con questa immagine ci si può render conto di come "cominciano ad andare avanti" i dilatori:

$\underrightarrow{\underline{0},\ldots,\underline{\omega},\ldots,\underline{\lambda},\ldots}\ \Omega$ Id, Id+1,...

I dilatori possono essere ritenuti "Π^1_2-ordinali", e con essi può essere compiuta una analisi Π^1_2-ordinale delle teorie (così come si fa un'analisi ordinale di esse alla Schütte).

Girard ha posto l'attenzione sulla stretta connessione tra la nozione di dilatore e quella di "sistema di notazione ordinale". Semplici esempi di tali sistemi sono: quello per cui ogni ordinale $z<10^x$ (x qualunque) riceve una notazione della forma $10^{u_{n-1}}.m_{n-1}+\ldots+10^{u_0}.m_0$ per qualche n, dove $u_0<\ldots<u_{n-1}<x$ e $m_i<10$; o quello per cui ogni ordinale $z<x^2$ (x qualunque) riceve una notazione della forma $x.u+t$ dove $u,t<x$.

Per Girard ogni notazione ordinale può essere espressa come $(c;x_0,\ldots,x_0;x)$ per $n\in\omega$, $x_0<\ldots<x_{n-1}<x\in\Omega$ dove c ("configurazione" è ciò che si ottiene dalla notazione astraendo da $x_0,\ldots,x_{n-1}$ ("parametri") e da x(che io chiamo"peso"). Per Girard un sistema $\mathcal{D}$ di notazione ordinale deve soddisfare a queste condizioni: ogni ordinale ha nel sistema al massimo una notazione di peso x, rimpiazzando opportunamente parametri e peso in una notazione di $\mathcal{D}$ si ottiene ancora una notazione di $\mathcal{D}$, l'ordine tra due notazioni con peso x è determinato esclusivamente dalla relazione d'ordine tra i loro parametri.

Girard dimostra un "teorema di forma normale" per i dilatori:

Se F è un dilatore, allora $\forall x\in\Omega\forall z\in F(x)\exists!!n\in\omega\exists!!f\in I(n,x)\exists!!z_0\in F(n)$ tale che $F(f)(z_0)=z$.

Con questo teorema egli ricava che ogni dilatore induce un sistema di notazione ordinale, ed afferma poi (dando rapidi cenni) che ogni sistema di notazione ordinale indurrebbe un dilatore. Ma, ad un'attenta considerazione, vien fuori che l'analisi del concetto di 'sistema di notazione ordinale' è insufficiente a dimostrare pienamente questa 'congettura di Girard', e che inoltre si può rafforzare il teorema della corrispondenza tra 'dilatori'e 'sistemi di notazione ordinale'.

Dopo aver apportato alcune modifiche e alcune integrazioni al concetto di 'notazione ordinale' , abbiamo aggiunto due altre condizioni a quelle di Girard perchè una classe $\mathcal{D}$ di notazioni ordinali sia un sistema di notazioni ordinali: la classe degli ordinali denotati nel sistema $\mathcal{D}$ con peso x (brevemente $|\mathcal{D}_x|$) è un ordinale; se $x\leq y$ allora $|\mathcal{D}_x|\leq|\mathcal{D}_y|$. Abbiamo poi dimostrato, precisando idee qua e là presenti in Girard, alcuni lemmi intorno ai sistemi di notazione ordinale.

Introdotte due operazioni (che chiamiamo "fondamentali") Φ e Δ , abbiamo dimostrato il seguente teorema "fondamentale":

"- Se F è un dilatore, allora ΔF è un sistema di notazione ordinale;
- Se $\mathcal{D}$ è un sistema di notazione ordinale, allora $\Phi\mathcal{D}$ è un dilatore;
- se F è un dilatore, allora $F=\Phi\Delta F$;
- se $\mathcal{D}$ è un sistema di notazione ordinale, allora $\mathcal{D}=\Delta\Phi\mathcal{D}$."

Il teorema fondamentale ci ha permesso di stabilire condizioni sufficienti (talora anche necessarie e sufficienti) perchè una notazione ordinale di un sistema $\mathcal{D}$ sia minore di un'altra notazione ordinale dello stesso sistema $\mathcal{D}$.

Ricordando che ogni configurazione di un sistema di notazione ordinale è rappresentabile come una coppia $\langle z_o;n\rangle$ dove z_o è l'ordinale denotato dalla minima notazione avente quella configurazione e n è la lunghezza della configurazione, possiamo descrivere brevemente le operazioni Δ e Φ (da GIRARD).

Dato un funtore F, ΔF è la classe delle notazioni ordinali $(z_o;x_o,\dots,x_{n-1};x)$, dove $n\in\omega$, $x\in\Omega$, $x_o<\dots<x_{n-1}<x$, $z_o\in F(n)$, $\forall m\neq n\,\neg\exists g(g\in \mathcal{I}(m,n)$ e $z_o \in rg(F(g)))$, e dove l'ordinale denotato da una tale notazione è $F(f)(z_o)$ per $f\in \mathcal{I}(n,x)$ t.c. $\forall i\in n\ f(i)=x_i$.

Data una classe $\mathcal{O}$ di notazioni ordinali, $\Phi\mathcal{O}(x) = |\mathcal{O}_x|$ per ogni ordinale x, e se $f\in \mathcal{I}(x,y)$ $\Phi\mathcal{O}(f)(V_{\mathcal{O}}(c;x_o,\dots,x_{n-1};x))= V_{\mathcal{O}}(c;f(x_o),\dots,f(x_{n-1});y)$. (Con alcune importanti precisazioni, perchè in generale $\Phi\mathcal{O}(f)$ non è ovunque definita).

[1] GIRARD, J.-Y., Π^1_2 -logic. Part 1: Dilators, to appear in "Annals of Mathematical Logic"

[2] MOSTOWSKI A., Formal systems of analysis based on an infinitistic rule of proof, in "Infinitistic methods", Varsavia, 1961.