Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

UN'INTERPRETAZIONE CATEGORIALE DEGLI OGGETTI ANOMICI (°)

FERDINANDO ARZARELLO-Istituto Matem. Univ. Torino

Le successioni anomiche giuocano un ruolo importante nella matematica e nella logica intuizionistiche. La loro teorizzazione risale a G.Kreisel(1,2,3); per una discussione tecnica e qualche notizia storica si veda Troelstra(1).

Il risultato tecnico più interessante è il cosiddetto "teorema di eliminazione", il quale dimostra l'ipotesi di Kreisel, secondo cui la quantificazione sugli oggetti anomici è solo un modo di dire e prepara il terreno al teorema analogo, ma tecnicamente più complesso, per le successioni di "libera scelta". Gli assiomi dati da Kreisel per le successioni anomiche suonano:

LS1. $\forall n \exists \alpha (\alpha \varepsilon n)$

LS2. $\alpha \equiv \beta \vee \alpha \not\equiv \beta$ ($\equiv$ è l'uguaglianza intensionale)

LS3. $A(\alpha) \rightarrow \exists n(\alpha \varepsilon n \wedge \gamma \varepsilon n\ A(\gamma))$

In LS2, si può anche rimpiazzare $\equiv$ con $=$; LS3 è formulabile anche con parametri anomici oltre a α, a patto di stipulare opportune restrizioni. A questi assiomi di solito

(°) Ringrazio G.Corsi che mi ha suggerito il termine "anomico" quale versione dell'inglese "lawless".

si aggiunge un ulteriore schema: il principio di Brouwer (cfr. Troelstra(1),ass.LS4); LS2 è invece stato sottoposto a critiche piuttosto convincenti(cfr. van Dalen, p.22)

Una semantica per le successioni anomiche fu studiata da van Dalen (1), che usò i modelli di Beth per dare una versione adatta ad LS dei modelli topologici della Moschovakis (1).

In questa comunicazione presento un tentativo di generalizzazione della semantica per le successioni anomiche al caso di oggetti anomici qualsiasi, usando i modelli su fasci secondo la definizione di Kripke-Joyal, quale è presentata in Reyes (1). L'idea è di interpretare gli oggetti anomici (intesi come collezioni via via costruite di oggetti completi; cfr. la nozione brouweriana di spiegamento) anzichè sul fascio P(F) (supposti interpretati su F gli oggetti completi) su di un fascio P°(F), costituito dagli insiemi generici di oggetti completi rispetto a un' usuale definizione di "forcing"(cfr. Feferman).

Si costruisce così un modello per oggetti anomici in cui LS1 è soddisfatto, mentre LS3 lo è restringendolo a formule geometriche. La dimostrazione di questo secondo fatto prova che un eventuale teorema di eliminazione generalizzato per gli oggetti anomici non presenta difficoltà per le formule positive(cioè senza $\forall$ e $\rightarrow$). Si ottiene anche un risultato di conservatività come corollario.

NOTAZIONI. 1. In quanto segue $\underline{C}$ è un sito numerabile; $F:\underline{C}^{\circ} \rightarrow SET$ è un fascio, t.c. $\cup\{F_q : q\varepsilon\underline{C}\}$ è ancora numerabile.

2. Userò le notazioni di Reyes(1) per l'interpretazione del linguaggio; gli oggetti nomici si suppongono interpretati in un unico fascio F per semplicità.

3. Per ogni r in $\underline{C}$, $a_{r,i}$ $(i\varepsilon\ \omega)$ è un'enumerazione di F_r; per ogni $f:r \rightarrow s$,con abuso di notazione, indico con $a^{r}_{s,i}$ l'oggetto $F(f)(a_{s,i})$.

4. Sia L un linguaggio del 2° ordine; con L' indicheremo L + le costanti $a^{r}_{s,i}$ + una famiglia ξ_r di parametri del 2° ordine.

In quanto segue, intenderemo fissata un'interpretazione di L"(=L' senza i parametri ξ) in F, P(F), che chiameremo $\underline{M}$.

Definisco un insieme di condizioni di "forcing" come un insieme finito di enunciati del tipo $a^{s}_{s,i}\ \eta\ \xi_s$, $\eta = \varepsilon, \not\varepsilon$.
Se A è una formula di L', con $c_{r_1}, \ldots, c_{r_k}$ gli oggetti di F_{r_i},$P(F)_{r_i}$ su cui si interpretano i parametri di A e se esiste $f:r \rightarrow r_i$, con $(A)\frac{r}{r}i$ intendo la formula $A(c_{r_i} / F^{r}_{r}i(c_{r_i}))$.
La definizione vale anche per insiemi di condizioni di "forcing": in tal caso scriverò P^{r} invece di $P\frac{r}{r}i$.Per induzione sulla complessità di A, si definisce $P^{q} \Vdash (A)\frac{r}{q}i$:
(i) A atomica non contenente ξ : $P^{q} \Vdash (A)\frac{r}{q}i$ sse $\underline{M} \models (A)\frac{r}{q}i$

(ii) $P^q \Vdash (a^r_{s,i})^r_q \varepsilon\, \xi_r$ sse $a^s_{s,i} \varepsilon\, \xi_s$ è in P.

(iii) $P^q \Vdash (\exists x Ax)\frac{r}{q}i$ sse esiste c in F_q o in $P(F)_q$ t.c.

$P^q \Vdash (Ac)\frac{r}{q}i$.

ecc.

Dalla definizione risulta che se $P^q \Vdash (Ac)\frac{r}{q}i$ allora $P^s \Vdash (Ac)\frac{r}{s}i$.

Con tecniche standard si dimostra che esiste una successione generica; se ξ è generica definisco

$\xi^\circ_r = (a^r_{s,i} : \xi \Vdash a^r_{s,i} \varepsilon\, \xi_r)$. Poniamo poi $P^\circ(F) = (\xi^\circ, \xi$ gen.)

PROPRIETA'1. $P^\circ(F)$ è un fascio.

Estendiamo $\underline{M}$ in modo naturale ad un'interpretazione $\underline{M}^\circ$ in cui i parametri ξ sono interpretati su $P^\circ(F)$. Vale la

PROPRIETA' 2. Sia A una formula positiva di L', r in $\underline{C}$:

$$r \models (A)\frac{r}{r}i \quad \text{sse} \quad \underline{M}^\circ(\xi) \Vdash (A)\frac{r}{r}i.$$

Sia ora L^+ il linguaggio L', con le ξ che giuocano come variabili (quantificate) e non solo come parametri.

PROPRIETA' 3. La struttura $(F, P(F), P^\circ(F))$ per L^+ soddisfa i seguenti assiomi, varianti di LS1,3:

a)$_k$ $\forall x_1, \ldots x_k\ \exists \xi (x_1 \varepsilon\, \xi \ \ldots x_k \varepsilon\, \xi)$

b) Sia A in L^+ geometrica(cioè del tipo $\forall \vec{x}(C \rightarrow D)$, C, D positive, allora esiste un k t.c.:

$$A(\xi) \rightarrow \exists x_1, \ldots, x_k \varepsilon\, \xi \forall \eta (x_1 \varepsilon\, \eta \ldots x_k \varepsilon\, \eta \rightarrow A(\eta))$$

Sia infine $\underline{H}$ un sistema di logica intuizionistica del 2° ordine, sia $\underline{H}^1$ il corrispondente sistema al 1° ordine; siano LS1, LS3 i sistemi di assiomi a)$_k$ e b) di pag. prec. opportunamente espressi, sia A una formula geometrica del 1° ordine; vale il

COROLLARIO. $\underline{H} + LS1 + LS3 \vdash A$ sse $\underline{H}^1 \vdash A$.

BIBLIOGRAFIA

van DALEN D.(1) An interpretation of intuitionistic Analysis, Ann. Math. Log. 13(1978),pp.1-43.

FEFERMAN S.(1) Some applications of the notion of forcing and generic sets, Fund. Math. 55(1965), pp. 325-345.

KREISEL G.(1) A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs, JSL 23(1958),369-388.

(2) Mathematical Logic. In: Lectures on modern mathematics, vol III (ed.T.L.Saaty),pp.95-195(1965).

(3) Lawless sequences of natural numbers, Comp. Math. (1968),pp. 222-248.

MOSCHOVAKIS J.R.(1) A topological interpretation of 2nd order intuitionistic arithmetic,Comp.Math. 26(1973), pp. 261-276.

REYES G.E., Theorie des Modeles et Faisceaux,Rapport n°63, Juin 1976,Univ. Cath. de Louvain.

TROELSTRA A.S., Choice Sequences, Oxford Univ. Press,1977.