Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ATOMS IN MODAL ALGEBRAS

FABIO BELLISSIMA

Il contenuto della comunicazione è stato essenzialmente tratto dall'omonimo preprint; rimandando ad esso per i dettagli tecnici ci limitiamo qui ad esporre le idee generali. Indichiamo con V_K la varietà delle algebre di Boole arricchite con un operatore unario $^\circ$ che soddisfa le identità $1^\circ = 1$ e $(xy)^\circ = x^\circ y^\circ$. Alcune sottovarietà di V_K sono state studiate dettagliatamente: la varietà della algebre di chiusura (o topologiche, o di interno), caratterizzata dalle ulteriori identità $x^\circ \leq x^{\circ\circ}$ e $x^\circ \leq x$; quella delle algebre monadiche ($x^\circ \leq x^{\circ\circ}$, $x^\circ \leq x$, $x^{\circ'\circ'} \leq x$); quella delle algebre diagonalizzabili ($x^\circ \leq x^{\circ\circ}$, $(x^\circ \to x)^\circ \leq x^\circ$).Il problema che abbiamo affrontato consiste nella determinazione di atomicità delle algebre libere su finiti generatori di alcune varietà di algebre modali, tra cui V_K e le sottovarietà precedentemente citate.

E' da tempo noto il legame esistente tra le sottovarietà di V_K e le logiche modali normali. In anni recenti inoltre la scoperta di talune inadeguatezze della semantica di Kripke (e precisamente del concetto di "cornice") ha portato a previlegiare gli strumenti dell'algebra universale a quelli più propriamente logici; nel nostro lavoro, viceversa, ci siamo valsi di suggestioni derivanti dalla maggiore immediatezza della semantica kripkiana per risolvere un problema che è specificamente algebrico.

La sottostante figura ci serve a chiarire la traduzione in termini logici del concetto di atomo di algebra libera su n generatori:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, leftrightarrow, "1"] \arrow[d, "2"'] \arrow[dr] & & V \arrow[d] \\
\mathcal{M} = \langle M,R,V\rangle \arrow[d] & \mathfrak{B} = \langle B,+, \ ,0,1,',^{\circ}\rangle \arrow[r, phantom, "\overset{3}{\cong}"] & \mathfrak{F}_V(\omega) \arrow[d] \\
\langle M,R,T\rangle \arrow[rr, leftrightarrow, "4"] & & S(\mathfrak{F}_V(\omega)) = \langle M',R',T'\rangle
\end{tikzcd}$$

(1) Esiste una biezione tra le logiche normali modali e le sottovarietà di V_K, in virtù della biezione tra identità del linguaggio algebrico di V_K e formule modali proposizionali.

(2) $\mathcal{M}$ è il modello canonico di L.

(3) $\mathfrak{B}$ è l'algebra di Lindembaum di L arricchita di un operatore così definito: $[\varphi]^{\circ} = [\Box\varphi]$. $\mathfrak{F}_V(\omega)$ è l'algebra libera di V su ω generatori. La funzione f dall'insieme delle classi di equivalenza delle variabili proposizionali all'insieme dei generatori di $\mathfrak{F}_V(\omega)$ $f([p_i]) = x_i$ è ovviamente estendibile ad un isomorfismo.

(4) $T = \{X \subseteq M : \exists \varphi : m \models^{\mathcal{M}} \varphi$ sse $m \in X\}$. $S(\mathfrak{F}_V(\omega))$ è lo spazio duale di $\mathfrak{F}_V(\omega)$. La funzione g da M ad M' così definita: $g(m) = \{f([\varphi]) : m \models \varphi\}$ è un isomorfismo tra $\langle M,R\rangle$ e $\langle M',R'\rangle$ ed è un omeomorfismo tra $\langle M,T\rangle$ ed $\langle M',T'\rangle$.

Lo stesso diagramma vale sotituendo $\mathfrak{F}_V(n)$ a $\mathfrak{F}_V(\omega)$ purchè ci si limiti, sul versante logico, a considerare solo le n-formule, quelle formule cioè in cui non compaiono variabili proposizionali con indice maggiore di n. E' chiaro allora che un n-termine t è un atomo di $\mathfrak{F}_V(n)$ sse la n-formula corrispondente vale in un solo punto di $\mathcal{M}$. Dalla figura si può però osservare come il modello n-canonico (cioè il modello canonico con linguaggio ristretto alle n-formule) ed $\mathfrak{F}_V(n)$ abbiamo la stessa difficoltà strutturale. E' essenziale allora, data una logica, poter costruire un modello equivalente al modello n-canonico (e quindi il termine corrispondente ad una n-formula che vale in un solo punto del nuovo modello è ancora un atomo di $\mathfrak{F}_V(n)$) il quale sia strutturalmente più semplice.

Per costruire un siffatto modello per K (la logica corrispondente alla varietà V_K) ci si è valsi della completezza di K rispetto alla classe dei modelli antitransitivi, finiti e privi di cicli (e quindi inversamente fondati, cioè senza infinite sequenze aRbRcR... dove a,b,c non sono necessariamente distinti). Si è quindi potuto costruire un modello rispetto a cui K è completa e la cui relazione è inversamente fondata, distinguerne i punti per livello, e, per induzione sul livello, trovare per ogni punto una formula che vale solo in esso.

La ricerca di un modello maneggevole per K4 è risultata più difficile (ricordiamo che K4 ha come assioma specifico $\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$). Tale difficoltà è derivata dal fatto che non esiste un modello inversamente fondato rispetto a cui K4 sia completa (se così fosse avremmo K4 = GL). Possiamo tuttavia costruire un modello fondato in senso più debole: infatti ogni modello finito di K4 ha la proprietà che ogni sequenza $a_1 R a_2 R \ldots$ di punti tale che a_i ed a_{i+1} non appartengono allo stesso cluster (cioè allo stesso sottoinsieme su cui la relazione è totale) è finita.
Ciò, unitamente alla proprietà del modello finito goduta da K4, ci consente di costruire un modello inversamente fondato rispetto ai cluster ed equivalente al modello n-canonico; si può procedere quindi ancora una volta per induzione alla determinazione degli atomi. Si può inoltre procedere in modo analogo per ogni stensione di K4 avente la proprietà del modello finito. Ed essendo tali le logiche corrispondenti alle varietà citate precedentemente (algebre topologiche, diagonalizzabili, monadiche), si possiede in tal modo di un algoritmo per elencare gli atomi delle algebre libere su finiti generatori di tali varietà.