Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

LA COMPLESSITA' DELLE DIMOSTRAZIONI NELLA LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

Carlo Cellucci

SOMMARIO: In questa nota si presentano alcune estensioni dei risultati di Statman [4] . Le estensioni riguardano l'uso delle dimostrazioni normali nel senso di Prawitz [3] invece delle dimostrazioni debolmente normali (cioè normali nel senso di Prawitz [2]), e la trattazione diretta della logica dei predicati, invece della logica dei predicati con l'eguaglianza più la sua immagine proposizionale.

Il sistema di deduzione naturale per la logica dei predicati del primo ordine è formulato come in [1] tranne che: a) si ammettono come costanti logiche solo $\bot$, $\rightarrow$, $\forall$; b) si eliminano le regole $(\wedge I)$, $(\wedge E_i)$ e nella regola $(\bot)$ si ammettono come conclusioni formule qualsiasi $A \neq \bot$ e non solo formule atomiche P.

La lunghezza di una formula A, lg(A), è il numero delle (pseudo-)formule atomiche e delle costanti logiche di A.

La lunghezza di una dimostrazione $\mathfrak{D}$, lg($\mathfrak{D}$), è il numero delle inferenze di $\mathfrak{D}$, tranne le inferenze di $\mathfrak{D}$ con numero di premesse nullo (cioè ottenute applicando (Ass)).

Le deviazioni di una dimostrazione $\mathfrak{D}$ sono: a) le successioni formate da un'inferenza ottenuta applicando una I-regola e da un'inferenza ottenuta applicando una E-regola, dove la conclusione della prima è la premessa maggiore della seconda; b) le inferenze ottenute applicando $(\bot)$ la cui conclusione è una formula non atomica. Le deviazioni della forma a) si dicono proprie, quelle della forma b) si dicono improprie. Una dimostrazione normale è una dimostrazione priva di deviazioni.

Le regole di conversione proprie sono $\rightarrow$-convn e $\forall$-convn, le regole di conversione improprie sono $\bot\rightarrow$-convn e $\bot\forall$-convn, definite come in [4] 5.1.7.

Si dice che una dimostrazione $\mathfrak{D}$ si converte in una dimostrazione $\mathfrak{D}'$ con una *successione di conversioni proprie di lunghezza* n se esiste una successione di dimostrazioni $\mathfrak{D}_1,\dots,\mathfrak{D}_n$ tale che $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}'$ e per ogni i, $1\leq i<n$, $\mathfrak{D}_{i+1}$ si ottiene da $\mathfrak{D}_i$ con un'unica applicazione di una regola di conversione propria. Analogamente nel caso delle conversioni improprie.

TEOREMA 1. Per ogni dimostrazione $\mathfrak{D}$ e per ogni m tale che, per ogni conclusione A di inferenza ottenuta applicando $(\perp)$, $lg(A)\leq m$, esiste una dimostrazione $\mathfrak{D}'$ priva di deviazioni improprie tale che $lg(\mathfrak{D}') \leq (6\cdot(m-1)+1)\cdot lg(\mathfrak{D})$ e $\mathfrak{D} \geqslant \mathfrak{D}'$ con una successione di conversioni improprie di lunghezza $\leq (m-1)\cdot lg(\mathfrak{D})$.

TEOREMA 2. Per ogni dimostrazione $\mathfrak{D}$ priva di deviazioni improprie esiste una dimostrazione normale $\mathfrak{D}'$ tale che $lg(\mathfrak{D}') \leq 2^{lg(\mathfrak{D})}_{2\cdot lg(\mathfrak{D})}$ e $\mathfrak{D} \geqslant \mathfrak{D}'$ con una successione di conversioni proprie di lunghezza $\leq 2\cdot lg(\mathfrak{D})\cdot 2^{lg(\mathfrak{D})}_{2\cdot lg(\mathfrak{D})}$ (dove 2^k_n è la funzione definita da: $2^k_o = k$, $2^k_{n+1} = 2^{2^k_n}$).

Il teorema 2 fa nascere il problema se esistano limiti sulla lunghezza di $\mathfrak{D}'$ e della successione di conversioni che termina con $\mathfrak{D}'$ essenzialmente migliori di quelli dati dal teorema, cioè limiti polinomiali invece che esponenziali. Una risposta negativa è fornita dal seguente risultato.

TEOREMA 3. Non esiste alcun polinomio p(n) tale che, per ogni formula senza quantificatori A e ogni dimostrazione priva di classi di assunzioni non scaricate $\underset{A}{\mathfrak{D}}$ con $lg(\mathfrak{D})\leq n$, esiste una dimostrazione normale priva di classi di assunzioni non scaricate $\underset{A}{\mathfrak{D}'}$ tale che $lg(\mathfrak{D}')\leq p(n)$ e $\mathfrak{D} \geqslant \mathfrak{D}'$.

Un ulteriore problema sollevato dai teoremi 1 e 2 presi insieme è che essi non permettono un confronto tra la lunghezza di una dimostrazione $\mathfrak{D}$, da un lato, e la lunghezza della dimostrazione normale $\mathfrak{D}'$ in cui $\mathfrak{D}$ si converte e la lunghezza della successione di conversioni che termina con $\mathfrak{D}'$, dall'altro, poiché tali lunghezze dipendono dal numero dei sim-

boli di $\mathfrak{D}$ (specificamente, dalla lunghezza delle conclusioni di inferenze ottenute applicando $(\perp)$ in $\mathfrak{D}$), oltre che dalla lunghezza di $\mathfrak{D}$. Questa difficoltà può essere risolta considerando una nozione di dimostrazione normale più debole.

Le *deviazioni deboli* di una dimostrazione $\mathfrak{D}$ sono le deviazioni della forma a) già considerata, e b) le successioni formate da un'inferenza ottenuta applicando $(\perp)$ e da un'inferenza ottenuta applicando una E-regola, dove la conclusione della prima è la premessa maggiore della seconda. Le deviazioni della forma a) si dicono *deboli proprie*, quelle della forma b) si dicono *deboli improprie*. Una dimostrazione *debolmente normale* è una dimostrazione priva di deviazioni deboli.

Le dimostrazioni debolmente normali conservano le principali proprietà delle dimostrazioni normali (forma dei cammini, proprietà della sottoformula), ma non la proprietà che l'ultima inferenza di una dimostrazione normale priva di classi di assunzioni non scaricate si ottiene applicando una I-regola (v. [1], corollario 1.7.8).

TEOREMA 4. Per ogni dimostrazione $\mathfrak{D}$ esistono dimostrazioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ tali che:

(i) $\mathfrak{D}_1$ non contiene deviazioni deboli improprie;

(ii) $lg(\mathfrak{D}_1) \leq (6\cdot(3^n-1)+1)\cdot lg(\mathfrak{D})$ dove $n = 2^{3\cdot lg(\mathfrak{D})+1}$;

(iii) $\mathfrak{D} \geqslant \mathfrak{D}_1$ con una successione di conversioni improprie di lunghezza $\leq (3^n-1)\cdot lg(\mathfrak{D})$ dove $n = 2^{3\cdot lg(\mathfrak{D})+1}$;

(iv) $\mathfrak{D}_2$ è debolmente normale;

(v) $lg(\mathfrak{D}_2) \leq 2^{lg(\mathfrak{D}_1)}_{2\cdot lg(\mathfrak{D}_1)}$;

(vi) $\mathfrak{D}_1 \geqslant \mathfrak{D}_2$ con una successione di conversioni proprie di lunghezza $\leq 2\cdot lg(\mathfrak{D}_1)\cdot 2^{lg(\mathfrak{D}_1)}_{2\cdot lg(\mathfrak{D}_1)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CELLUCCI, C., *Teoria della dimostrazione. Normalizzazioni e assegnazioni di numeri ordinali*, Torino (Boringhieri) 1978.

[2] PRAWITZ, D., Natural Deduction. A Proof-theoretical Study, Stockholm (Almqvist & Wiksell) 1965.

[3] PRAWITZ, D., "Validity and Normalizability of Proofs in 1st and 2nd Order Classical and Intuitionistic Logic", in: Atti del Congresso Nazionale di Logica, Montecatini Terme, 1-5 ottobre 1979, a cura di S. Bernini, Napoli (Bibliopolis) 1981, pp. 11-36.

[4] STATMAN, R., "Bounds for Proof-search and Speed-up in the predicate calculus", Annals of Mathematical Logic 15 (1978), pp. 225-287.