Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

NOTA SULLE ORIGINI DEL CALCOLO LOGICO

di Paolo FREGUGLIA (Università di Genova)

SUMMARY:
In this paper I examine the origins of the use of the logical rules in the Peano's propositional calculus referring to the work [3]

1. Come è noto le origini più significative del calcolo logico classico (non algebrico-logico) si fanno risalire all'opera di Frege e di Peano. Il primo, in modo autonomo ed indipendente dalla tradizione booleana, propose in <u>Begriffsschrift</u>, nel 1879, attraverso il ben conosciuto linguaggio bidimensionale, un calcolo in cui tra l'altro viene esplicitamente assegnata la regola di separazione (modus ponens). La logica di Peano invece, si sviluppa almeno in tre fasi. La prima è puramente algebrica (vedi [4] 1888), la seconda è caratterizzata dal passaggio dalla impostazione algebrica a quella più propriamente logico-proposizionale (vedi in particolare lavori dal 1891 al 1900). La terza fase riguarda, come abbiamo evidenziato in [*], una impostazione del calcolo che sembra preludere ai "calcoli naturali" (vedi [5] 1906). In questa brevissima nota ci occuperemo della seconda fase, analizzando il calcolo che compare in una significativa memoria di Peano ([3] 1891) con par-

ticolare attenzione alle regole inferenziali utilizzate.

2. Notevole interesse storico riveste la memoria peaniana <u>Formole di logica matematica</u> (1891)[3], in quanto in essa viene presentato un insieme di "proposizioni primitive" (assiomi logici) che costituiscono una adeguata base per la formulazione di un calcolo proposizionale abbastanza svincolato dalla impostazione algebrico-logica. I connettivi impiegati sono $-$ (non), $\supset$ (se...allora...) [Peano suggerisce quale significato della scrittura $a \supset b$ la locuzione "da a si deduce b"] ed $\cap$ (e) [che viene per lo più espressa con la giustapposizione delle lettere proposizionali] . Denotate dunque con le lettere a, b,........ proposizioni qualunque, gli assiomi in questione sono:

A.1: $a \supset a$	A.6: $a \supset b . \supset . ac \supset bc$
A.2: $a \supset aa$	A.7: $a . a \supset b : \supset . b$
A.3: $ab \supset b$	A.8: $a \supset b . b \supset c : \supset . a \supset c$
A.4: $ab \supset ba$	A.9: $b \supset . a \supset ab$
A.5: $abc \supset acb$	A.10: $a \supset b . \supset . -b \supset -a$
	A.11: $-(-a) = a$

Introdotto il segno Λ che indica l'<u>assurdo</u>, viene dato l'ulteriore assioma:

A.12: $a - a = [a(-a)] = \Lambda$

Sono date poi le seguenti definizioni:

Def. 1 : $a = b . = : a \supset b . b \supset a$

Def. 2 : $a \cup b . = . -((-a)(-b))$

L'unica regola di calcolo assegnata è la <u>sostituzione</u> che viene così formulata:

"Se p è una proposizione [....] contenente le lettere $x, y, \ldots$ con $\left(\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right) p$ si intende ciò che diventa p, quando al posto di x si legga a ; e con $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ a & b \end{smallmatrix}\right) p$ si intende ciò che diventa p, quando al posto di x e y si legga a e b ; e così via."

Come " definizione" di <u>dimostrazione</u> Peano dà la seguente:

"Dimostrare una proposizione significa ottenerla combinando convenientemente le proposizioni già ammesse".

Possiamo immediatamente osservare che "modus ponens" e "sillogismo" (transitività per $\supset$) non compaiono in questo sistema come regole inferenziali, bensì come formule (in particolare come assiomi, rispettivamente A.7 e A.8). Non c'è dunque nessuna "regola di separazione" e la definizione di dimostrazione data non dice nulla sul piano operativo.

Esaminiamo ora alcune derivazioni che compaiono in [3] :

2.1.: Ts.: $abc \supset bac$ [P. 9 §.1 di [3]]

1. $ab \supset ba$ A.4
2. $a \supset b . \supset . ac \supset bc$ A.6
3. $ab \supset ba . \supset . abc \supset bac$ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ ab & ba \end{smallmatrix}\right)$ in 2.
4. $a . a \supset b . \supset : b$ A.7
5. $ab \supset ba : ab \supset ba . \supset . abc \supset bac . \supset \therefore abc \supset$ $\supset bac$ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ ab \supset ba & abc \supset bac \end{smallmatrix}\right)$ in 4.

2.2.: Ts.: $a \supset b . \supset . a \supset ab$ [P. 15 §.1 di [3]]

1. $a \supset b . \supset . ca \supset cb$ [P. 14 §.1 di [3]]
2. $c \supset b . \supset . cc \supset cb$ $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ in 1.
3. $cc = c$ [P. 3 §.2 di [3]]
4. $c \supset b . \supset . c \supset cb$ sost. in 2. in base a 3.
5. $a \supset b . \supset . a \supset ab$ $\left(\begin{smallmatrix} c \\ a \end{smallmatrix}\right)$ in 4.

2.3.: Ts.: $ab \supset b$ [P. 10 §.1 di [3]]

1. $ab \supset ba$ A.4
2. $ab \supset a$ A.3
3. $ba \supset b$ $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ in 2.
4. $a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c$ A.8
5. $ab \supset ba . ba \supset b . \supset : ab \supset b$ $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ ab & ba & b \end{smallmatrix}\right)$ in 4.

3. Dagli esempi poco sopra riportati appare chiaro che l'uso della regola di sostituzione avviene sia nella forma enunciata esplicitamente da Peano, sia nella forma (vedi Leibniz [2] e Jevons [1]): "Se $\alpha = \beta$ (con α e β formule) allora si può porre [dove si ritiene opportuno] in una formula $\mathcal{A}$ che contiene α (o β) β al posto di α (o α al posto di β)" (vedi Ts. 2.2). La presentazione come formula del modus ponens può trovare una giustificazione dall'esame stesso delle derivazioni in cui viene impiegato (vedi ad es. Ts. 2.1). Come si può osservare, in predette derivazioni compare il seguente schema (che chiaramente sottointende, come autentica regola, il modus ponens):

1. α
2. $\alpha \supset \beta$
3. $\alpha . \alpha \supset \beta . \supset : \beta$ dove α e β sono formule.

Dopo 1. e 2. invece di comparire semplicemente la β, che esplicitamente viene intesa come formula derivata da 1. e 2., compare la formula 3.. Molto presumibilmente Peano, che risente indiscutibilmente della impostazione algebrica, vede l'ultimo β (a partire da destra verso sinistra) della 3. come il <u>risultato</u> di un calcolo e quindi, in quanto tale, analogo ad un elemento conclusivo di una espressione aritmetica. In tal senso l'ultima applicazione (connettivo principale) del segno $\supset$ nella formula 3. è assimilabile all'applicazione dell'uguale in una espressione aritmetica. Va infine osservato che Peano non ha una posizione puramente sintattica del modus ponens (in nota dà la seguente indicazione di lettura: "se α è vera, e se da α si deduce β, allora β è vera".) Inoltre negli <u>Arithmetices principia</u> (1889) impiega questa regola esplicitamente come tale, pur senza enunciarla, fin dalla prima dimostrazione che, quasi a mo' di esempio, presenta. Analoghe considerazioni valgono per il "sillogismo", cioè per la formula A.8 (vedi Ts. 2.3).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] JEVONS W.S. <u>Pure logic and other minor works</u>, London, 1890

[2] LEIBNIZ G.W. <u>Saggio di calcolo</u>, in Leibniz G.W. <u>Scritti di logica</u> (a cura di F. Barone), Bologna, 1968

[3] PEANO G. <u>Formole di logica matematica</u>, in Rivista di Matematica, Vol.I, 1891

[4] " " <u>Operazioni della logica deduttiva</u> in <u>Calcolo geometrico ecc.</u>, Torino, 1888

[5] " " <u>Super theorema de Cantor-Bernstein et additione</u>, in Rivista di Matematica, Vol.VIII, 1902 - 1906

(I lavori di Peano qui citati sono inseriti nella raccolta <u>Opere scelte</u>, curata da U.Cassina per conto dell'UMI e del CNR, Roma, 1958)

[*] Freguglia P. <u>Sulla dimostrazione di G.Peano del teorema detto di Cantor-Bernstein</u> Atti del Convegno nazionale di Logica, Montecatini Terme, 1 - 5 ottobre 1979.