Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

LE MODALITA' CONTROLOGICHE

Giangiacomò Gerla

J.Hintikka ([2]par.18), in riferimento ai problemi della quantificazione in contesti modali, pone come centrale la questione della identificazione di uno "stesso" individuo nei diversi mondi accessibili. Egli osserva che i criteri di identificazione utilizzati nel sistema concettuale innato nell'uomo si basano sulla percezione della continuità degli individui attraverso le successive trasformazioni. Quindi è interessante considerare modalità, che egli chiama"contrologiche",corrispondenti a relazioni di accessibilità che tengano conto di tale processo di identificazione. Egli contrappone tali modalità a quelle "logiche" in cui si considerano accessibili tra di loro anche mondi così dissimili tra di loro da rendere impossibile qualunque metodo di identificazione. Una tale distinzione viene fatta per poter affermare che le note obiezioni di Quine alla logica modale con quantificatori sono valide solo per le modalità logiche.

Allo scopo di proporre una semantica che permetta una definizione formale delle modalità contrologiche, diamo la seguente definizione.

Definizione. Sia L un linguaggio della logica modale del primo ordine. Diremo che $\mathfrak{C}=\langle (M_i)_{i\in I}, H\rangle$ è una struttura modale per L se: (a) $\forall i\in I$ $M_i=(D_i, \mathfrak{I}_i)$ è un modello per L; (b) per ogni $i,j\in I$ $H(i,j)$ è un insieme di funzioni di D_i in D_j ; (c) $\forall i\in I$ $H(i,i)$ contiene l'identità.

La definizione dell'espressione $\mathfrak{C},i \models A(a_1,\dots a_p)$, dove A è una formula con variabili libere comprese tra $x_1,\dots,x_p$, $a_1,\dots a_p \in D_i$ ed $i\in I$ è la stessa di quella data in [1] salvo che per la condizione

$$\mathfrak{C},i \models \Box B(a_1,\dots,a_p) \Leftrightarrow \forall j\in I\ \forall f\in H(i,j)\ \mathfrak{C},j \models B(f(a_1),\dots,f(a_p)).$$

Una tale condizione si può leggere dicendo che $B(a_1,\dots,a_p)$ è necessaria per $a_1,\dots,a_p$ se, comunque si trasformino gli elementi $a_1,\dots,a_p$, per essi continua a valere B. Invece $\Diamond B(a_1,\dots,a_p)$ sta a significare la possibilità di trasformare gli elementi $a_1,\dots,a_p$ in modo che valga B.

Al solito si pone $\mathfrak{C} \models A$ se per ogni $i\in I$ $\mathfrak{C},i\models A$ e si dice che A è valida se per ogni struttura modale $\mathfrak{C}$ risulta $\mathfrak{C} \models A$.

Non è difficile provare allora la validità delle formule $\Box A \to A$, $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, $(x=y) \to \Box(x=y)$, $\Box \forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$ (conversa di Barcan) e che da $\mathfrak{C} \models A$ segue $\mathfrak{C} \models \Box A$ (regola di necessitazione). Inoltre se $\mathfrak{C}$ è una categoria allora $\mathfrak{C} \models \Box\Box A \leftrightarrow \Box A$, se tutti i morfismi sono iniettivi allora $\mathfrak{C} \models x \neq y \leftrightarrow \Box(x \neq y)$, se sono suriettivi allora $\mathfrak{C} \models \forall x \Box A \to \Box \forall x A$ (formula di Barcan), infine se sono invertibili $\mathfrak{C} \models \Diamond A \to \Box \Diamond A$.

Particolarmente interessante è il caso in cui $\mathfrak{C}$ contiene un solo modello M e G=H(M,M) è un gruppo. Allora $A(x) \leftrightarrow \Box A(x)$ esprime l'invarianza della proprietà A rispetto al gruppo G di trasformazioni. Il sistema modale corrispondente è ovviamente del tipo S5.

Per le possibili applicazioni alla teoria dei modelli è invece interessante il caso in cui gli M_i sono tutti modelli di una stessa teoria ed H(i,j) contiene solo l'immersione identica. In tale caso $\Diamond A(a_1,\dots,a_p)$ starebbe a significare l'esistenza di una estensione del modello dato in cui $A(a_1,\dots$ $\dots,a_p)$ risulti vera. In proposito si rimanda a [3].

Complessa sembra l'impresa di trovare una adeguato teorema di completezza per la semantica proposta. Infatti la regola di particolarizzazzione, che gioca un ruolo essenziale nelle dimostrazioni di completezza, non è valida. Ad esempio notiamo che è valida la formula $x=y \to \Box(x=y)$ ma non lo è la formula $x=c \to \Box(x=c)$ che da essa si ottiene per particolarizzazione. Riferendoci ad esempio al modello (M,G), una tale formula esprimerebbe il fatto che l'elemento denotato da c è un punto fisso per G. E ciò non accade sempre. La non validità della regola di particolarizzazione è conseguenza del ruolo sostanzialmente diverso giocato dalle variabili e dalle costanti. L'interpretazione delle variabili è legata alla natura delle trasformazioni presenti in H(i,j). Quella delle costanti alla interpretazione fissata nei singoli modelli.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.C.Chang-H.J.Keisler, Model Theory, North-Holland, Amsterdam (1973).

[2] J.Hintikka, Existential Presuppositions and Uniqueness Presuppositions, in "D.Silvestrini, Individui e mondi possibili, Ed.Feltrinelli (1979)".

[3] G.Gerla, Teoria dei modelli e logica modale, publicato su questi Atti.