Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ENRICO MARTINO

Semantica intuizionista naturale e semantica di Beth generalizzata

Le semantiche di Beth e di Kripke per IPC (calcolo dei predicati intuizionista) sono state generalizzate da Veldman e de Swart in modo da ottenere prove di completezza puramente intuizioniste [2] [4] . La ricerca oggetto della presente comunicazione mira a stabilire un collegamento tra la nozione di verità in un modello di Beth generalizzato (GB-modello) e la nozione intuitiva di verità secondo il significato intuizionisticamente inteso dei simboli logici. Ne risulta che "vero in un GB-modello" significa "intuitivamente vero sotto certe ipotesi" in una conveniente accezione di tale locuzione.

1. Includiamo $\perp$ (assurdo) tra i simboli predicativi di IPC e definiamo la negazione ponendo $\neg A = A \rightarrow \perp$. Tutta l'esposizione va intesa in una metamatematica intuizionista.

Un <u>GB-modello</u> $M = \langle T, D, \phi \rangle$ consiste di uno spiegamento T (albero a cammini infiniti), di una specie $D \neq \emptyset$ e di una relazione binaria ϕ tra nodi di T (che indicheremo con $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...) e formule atomiche chiuse del linguaggio di IPC accresciuto di costanti individuali per gli elementi di D. Diremo che M <u>esplode</u> se esiste un $\vec{u}$ tale che $\phi(\vec{u}, \perp)$. La ϕ si estende alla relazione di <u>forcing</u> $\vec{u} \Vdash A$ tra nodi e formule chiuse mediante la seguente definizione induttiva:

i) per P atomica, $\vec{u} \Vdash P$ se, e solo se, esiste uno sbarramento $\mathcal{B}$ di $\vec{u}$ tale che, per ogni $\vec{v} \in \mathcal{B}$, o M esplode oppure $\phi(\vec{v}, P)$;

ii) $\vec{u} \Vdash A \rightarrow B$ se, e solo se, per ogni $\vec{v} \geq \vec{u}$, se $\vec{v} \Vdash A$ allora $\vec{v} \Vdash B$;

iii) $\vec{u} \Vdash \forall x A(x)$ se, e solo se, per ogni $d \in D$, $\vec{u} \Vdash A(d)$ (analogamente per $A \wedge B$);

iv) $\vec{u} \Vdash \exists x A(x)$ se, e solo se, esiste uno sbarramento $\mathcal{B}$ di $\vec{u}$ tale che, per ogni $\vec{v} \in \mathcal{B}$, $\vec{v} \Vdash A(d)$ per qualche $d \in D$ (analogamente per $A \vee B$).

A è <u>vera in M</u> ($M \Vdash A$) se $\langle\rangle \Vdash A$. A è <u>GB-valida</u> se è vera in ogni GB-modello. Un <u>modello di Beth</u> (B-modello) è un GB-modello non esplodente.

Un <u>modello naturale</u> (N-modello) $\mathcal{M} = \langle D, V \rangle$ consiste di una specie $D \neq \emptyset$ (dominio di interpretazione delle variabili) e di una relazione unaria V, definita sulle formule atomiche chiuse del linguaggio ampliato come sopra, tale che non $V(\perp)$ ($\perp$ deve essere interpretato in una proposizione falsa!). V si estende poi ad una relazione $\mathcal{M} \models A$ su tutte le formule chiuse definita secondo il significato inteso dei connettivi e quantificatori (vedi 2.1 esclusa la vii)).

La teoria delle sequenze libere permette di stabilire una nota relazione tra B-modelli ed N-modelli ([3] p.118). Precisamente, se $M=\langle T,D,\Phi\rangle$ è un B-modello ed α è una sequenza libera in T, a questa si può associare un N-modello $M_\alpha=\langle D,V\rangle$ definendo V nel seguente modo: $V(P) \Leftrightarrow \exists n\, \Phi(\bar{\alpha} n,P)$ (con $\bar{\alpha} n = \langle \alpha 0, \alpha 1, \dots, \alpha(n-1)\rangle$). Sussiste allora il

1.1 <u>Teorema</u>. Sia M un B-modello e sia $\vec{u}$ un suo nodo. $\vec{u} \Vdash A$ se, e solo se, per ogni $\alpha \in \vec{u}$, $M_\alpha \models A$.

Ne segue facilmente che una formula è B-valida se, e solo se, è N-valida. Ora, mentre la GB-completezza è provabile coi metodi usuali dell'analisi intuizionista ([3] p.116), la B-completezza (la N-completezza) è intuizionisticamente equivalente ad un'istanza alquanto controversa del principio di Markov [1] . Convenendo allora di escludere l'uso di questa dai metodi di prova intuizionisti, si può dire che la GB-validità non è intuizionisticamente equivalente alla N-validità.
Di qui il problema, che tratteremo nel prossimo paragrafo, di estendere la N-semantica ad una GN-semantica che corrisponda alla GB-semantica secondo un analogo del teorema 1.1.

2. Chiameremo <u>sequenza di ipotesi</u> una sequenza $\langle Q_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ di proposizioni dotate di significato (non mere formule sintattiche).
Un <u>GN-modello</u> $\mathcal{M} = \langle D,V, \langle Q_n \rangle\rangle$ è costituito, oltre che da D e V come per gli N-modelli, da una sequenza di ipotesi. L'intenzione è che una formula A sia vera in $\mathcal{M}$ se è vera nello N-modello $\langle D,V \rangle$ "sotto le ipotesi Q_n". Tale idea è precisata dalla seguente definizione induttiva della relazione $\mathcal{M} \models A$ (in cui sottintenderemo $\mathcal{M}$):

2.1 i) se A è atomica e V(A) allora $\models A$;
ii) se $\models A$ e $\models B$ allora $\models A \wedge B$;
iii) se $\models A$ o $\models B$ allora $\models A \vee B$;
iv) se $\models A$ implica $\models B$ allora $\models A \rightarrow B$;
v) se, per ogni $d \in D$, $\models A(d)$ allora $\models \forall x A(x)$;

vi) se, per qualche $d \in D$, $\models A(d)$ allora $\models \exists x A(x)$;
vii) se, per qualche $n \in \mathbb{N}$, Q_n implica $\models A$, allora $\models A$;
viii) $\models A$ soltanto in virtù di i) - vii).

Un N-modello può essere considerato come un GN-modello in cui tutte le ipotesi siano vere.
Per la GN-semantica si dimostra direttamente il teorema di validità:

2.2 <u>Teorema</u>. Se $\vdash_{IPC} A$ allora A è GN-valida.

Quanto alla connessione con la GB-semantica, sia $M=\langle T,D,\Phi\rangle$ un GB-modello. Assumendo lo schema di Kripke

$$\exists \chi (\exists x\, \chi x \neq 0 \leftrightarrow A)$$

(dove χ indica una sequenza a scelte), si può trovare una sequenza χ tale che

2.3 $\exists x\, \chi(x) \neq 0$ se, e solo se, M esplode.

Ad ogni sequenza α libera in T associamo il GN-modello $M_\alpha = \langle D,V, \langle Q_n \rangle\rangle$ dove Q_n è la proposizione $\chi(n)=0$ e V è definita dalla posizione $V(P) \Leftrightarrow \exists n\, \Phi(\bar{\alpha} n,P)$ per $P \neq \perp$ ($V(\perp)$ è falsa in tutti i GN-modelli).
Sussiste allora l'analogo del teorema 1.1:

2.4 <u>Teorema</u>. Sia M un GB-modello e sia $\vec{u}$ un suo nodo. $\vec{u} \Vdash A$ se, e solo se, per ogni $\alpha \in \vec{u}$, $M_\alpha \models A$.

Ne segue che ogni formula GN-valida è GB-valida. Pertanto dalla GB-completezza segue la GN-completezza:

2.5 <u>Teorema</u>. Se A è GN-valida allora $\vdash_{IPC} A$.

Dalla GB-completezza e da 2.2 segue poi che se A è GB-valida allora è GN-valida; perciò

2.6 <u>Teorema</u>. A è GB-valida se, e solo se, è GN-valida.

Osserviamo che il teorema 2.4 è stato stabilito usando lo schema di Kripke, altro principio controverso che si giustifica mediante la problematica teoria del soggetto creativo. Tuttavia, la prova di GB-completezza usa soltanto GB-modelli con Φ decidibile. Per tali modelli una χ soddisfacente alla 2.3 può essere definita senza usare lo schema di Kripke: basta considerare una enumerazione $\langle \vec{u}_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ dei nodi e porre

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Phi(\vec{u}_n, \perp) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

. Pertanto i teoremi 2.5 e 2.6 sono provabili coi metodi intuizionisti usuali.

Bibliografia

[1] Kreisel G. (1962). Weak completeness of intuitionistic predicate logic. J.S.L. 27, 139-158.

[2] de Swart H. (1976). Another intuitionistic completeness proof. J.S.L. 41, 644-662.

[3] Troelstra A.S. (1977). Choice sequences. Oxford.

[4] Veldman W. (1976). An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic. J.S.L. 41, 159-166.