Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

P. Miglioli (°), U. Moscato, M. Ornaghi, G. Usberti (°°)
(°) Istituto di Cibernetica dell'Università di Milano
(°°) Istituto di Filosofia dell'Università di Milano

ALCUNI CALCOLI INTERMEDI COSTRUTTIVI

Scopo della comunicazione è illustrare un tipo di semantica intensionale, diversa da quella di Kripke per l'intuizionismo, la quale risulta adeguata per una famiglia piuttosto ampia di calcoli costruttivi (chiameremo così ogni calcolo C che soddisfa la proprietà della disgiunzione: se $C \vdash A \vee B$ allora $C \vdash A$ o $C \vdash B$). Mentre per alcuni di questi calcoli una semantica alla Kripke esiste, per altri non ci risulta che sia stata formulata, e per alcuni di questi ci pare verosimile che non sia formulabile.

Se quest'ultimo fatto è di per sè sufficiente a motivare un interesse 'tecnico' della nostra semantica, non basta a motivarne l'interesse 'filosofico'. A nostro avviso, il fatto che una particolare interpretazione algebrica delle costanti logiche, per esempio, si riveli adeguata a un calcolo non è sufficiente a farci considerare quell'interpretazione una buona semantica del calcolo; perchè ciò avvenga dobbiamo essere anche in grado di associare ad essa una plausibile 'teoria del significato' delle costanti. Sebbene per il momento siamo abbastanza lontani da una teoria del genere, ci sembra comunque opportuno fornire qualche spunto in questa direzione.

La nozione basilare della nostra semantica è quella di forma di valutazione (fdv) di un enunciato; intuitivamente, le fdv sono intese rappresentare i motivi strutturali della verità degli enunciati. Ne segue che la condizione di adeguatezza che risulta naturale imporre alla definizione di tale nozione è che da essa debba seguire che un enunciato A è (classicamente) vero in una valutazione sse c'è una fdv di A che è vera in quella valutazione (un 'motivo strutturale' della verità di A). Ora, questa caratterizzazione intuitiva è molto generica, nel senso che può metter capo a una notevole varietà di definizioni possibili; è per questo che abbiamo parlato di un tipo di semantica anzichè di una specifica semantica da associare a un singolo calcolo. Tuttavia, per esigenze di chiarezza e di brevità della presentazione, seguiremo la strada di illustrare direttamente una particolare semantica con fdv, mettendone in evidenza alcune caratteristiche generali, e suggeriremo più avanti delle possibili opzioni alternative.

Denoteremo con "$\mathfrak{F}(A)$" la classe delle fdv dell'enunciato A, e con "$\bar{A}$" un qualunque elemento di tale classe. La definizione induttiva di $\mathfrak{F}(A)$ procede dunque così:

$\mathfrak{F}(p) = \{p\}$, per p atomica

$\mathcal{F}(\bot)=\{\bot\}$, dove $\bot$ è la costante per il falso

$$\mathcal{F}(A\wedge B)=\left\{\frac{\overset{\nabla}{A}\quad\overset{\nabla}{B}}{A\wedge B}\;\middle|\;\overset{\nabla}{A}\in\mathcal{F}(A)\text{ e }\overset{\nabla}{B}\in\mathcal{F}(B)\right\}$$

$$\mathcal{F}(A\vee B)=\left\{\frac{\overset{\nabla}{A}}{A\vee B}\;\middle|\;\overset{\nabla}{A}\in\mathcal{F}(A)\right\}\cup\left\{\frac{\overset{\nabla}{B}}{A\vee B}\;\middle|\;\overset{\nabla}{B}\in\mathcal{F}(B)\right\}$$

$$\mathcal{F}(A\rightarrow B)=\mathcal{F}(B)^{\mathcal{F}(A)}$$

A questo punto sono le fdv stesse che vengono interpretate, mediante valutazioni classiche delle forme atomiche (che, per la definizione data, non sono altro che le formule atomiche). Viene quindi definita come segue la nozione di fdv vera in una valutazione V:

$\overset{\nabla}{p}$ è vera in V sse $V(p)=1$

$\overset{\nabla}{\bot}$ è sempre falsa

$\overset{\nabla}{A\wedge B}$ è vera in V sse $\overset{\nabla}{A}$ è vera in V e $\overset{\nabla}{B}$ è vera in V

se $\overset{\nabla}{A\vee B}$ è del tipo $\dfrac{\overset{\nabla}{A}}{A\vee B}$, allora è vera in V sse $\overset{\nabla}{A}$ è vera in V

se $\overset{\nabla}{A\vee B}$ è del tipo $\dfrac{\overset{\nabla}{B}}{A\vee B}$, allora è vera in V sse $\overset{\nabla}{B}$ è vera in V

$\overset{\nabla}{A\rightarrow B}$ è vera in V sse per ogni $\overset{\nabla}{A}$ che è vera in V la corrispondente $\overset{\nabla}{B}$ è vera in V.

Si verifica facilmente che tale definizione soddisfa il requisito di adeguatezza che abbiamo imposto alla nozione di fdv, e cioè che una formula sia classicamente vera in una valutazione sse esiste una sua fdv vera in quella valutazione. Da ciò segue che una formula A è classicamente valida sse per ogni valutazione V esiste una sua fdv $\overset{\nabla}{A}$ tale che $V\models\overset{\nabla}{A}$.

A questo punto possiamo definire la nozione di formula costruttivamente valida: A è costruttivamente valida sse esiste una sua fdv $\overset{\nabla}{A}$ tale che, per ogni valutazione V, $V\models\overset{\nabla}{A}$.

Qualche osservazione generale. Sono evidenti le analogie tra il concetto di fdv e la nozione di prova (canonica) utilizzata nella cosiddetta interpretazione BHK (Brower-Heyting-Kreisel) delle costanti logiche -l'interpretazione intesa, secondo molti, delle costanti logiche intuizioniste. In particolare, la definizione delle fdv dell'implicazione rispecchia da vicino la caratterizzazione di una prova (canonica) di $A\rightarrow B$ come una procedura che trasforma ogni prova (canonica) di A in una prova (canonica) di B. Ci sono però anche differenze sostanziali; in questa sede ci limiteremo a metterne in rilievo una, che riguarda il trattamento delle atomiche. Essendo queste prive di struttura logica, i 'motivi strutturali' della loro verità si riducono al loro valore di verità puro e semplice, cosicchè dal nostro punto di vista risulta del tutto naturale identificare la fdv di

un'atomica con la formula stessa. Naturalmente, però, perchè un tale punto di vista possa apparire naturale bisogna che si sia disposti ad accettare come legittime le nozioni classiche di verità e falsità, nel senso che bisogna ritenere sensato distinguere, in linea di principio, le condizioni di verità di un enunciato dalle sue condizioni di asseribilità. Dopo di che ci si porrà il problema di che cosa vuol dire accertare costruttivamente la verità di un enunciato; a questo problema noi risponderemmo che significa essere in grado di associare all'enunciato un 'albero di analisi' (una fdv, appunto) i cui nodi terminali corrispondono alle sottoformule atomiche dell'enunciato.

Ora, in una prospettiva filosofica generale come quella che ispira la interpretazione BHK, non si riconosce come sensata una nozione di verità che non sia 'riducibile' a quella di prova o di costruzione. Da questo atteggiamento generale segue che, perchè si ritenga sensato parlare di prova di un'atomica, è necessario identificare le formule atomiche di un linguaggio enunciativo con gli enunciati (inanalizzati) di una specifica teoria matematica; una prova di un'atomica sarà allora caratterizzabile nei termini dell'eventuale evidenza matematica che legittima l'asseribilità degli enunciati di quella teoria. A noi pare che, anche ammettendo che tale identificazione sia corretta, essa oscuri però l'altro aspetto cruciale del concetto di formula atomica, e cioè il fatto che, quando siamo interessati alla validità logica, intendiamo appunto fare astrazione dal modo in cui è eventualmente possibile provare gli enunciati che lasciamo inanalizzati, e riteniamo pertinente prendere in considerazione soltanto quella caratteristica di tali enunciati che rimane invariante al variare dei modi di dimostrazione: il loro valore di verità, appunto.

Non ci soffermeremo più a lungo sulle implicazioni filosofiche di questa nostra interpretazione del concetto classico di verità; quello che ci preme sottolineare qui è che è possibile rimanere nell'ambito di un'interpretazione costruttiva (nel senso specificato all'inizio) del significato delle costanti logiche anche riconoscendo alle nozioni classiche di verità e falsità una loro precisa legittimità, cioè rinunciando al tentativo di 'ridurle' ad altre nozioni. Va comunque osservato che, mentre un atteggiamento come quello che ispira l'interpretazione BHK mette capo, in ultima analisi, a una fondazione matematica (o addirittura aritmetica) della spiegazione del significato delle costanti logiche, l'esito complessivo di una concezione come la nostra è il riconoscimento di una (relativa) autonomia di un livello logico di analisi del significato degli enunciati rispetto a un livello più specificamente matematico.

Vorremmo invece mettere in luce una conseguenza specifica del nostro modo di concepire l'analisi costruttiva del significato.

Poiché, dal nostro punto di vista, l'intuizionismo non risulta più godere di una posizione di privilegio quale 'paradigma' di costruttivismo, diventa interessante una serie di problemi che finora ci sembra siano stati ingiustamente trascurati. Ci limiteremo a un esempio che presenta anche un interesse autonomo. Nel 1952 Lukasiewicz congetturò che il calcolo proposizionale intuizionista IP potesse essere caratterizzato come 'massimale' tra quelli che godono della proprietà della disgiunzione; tale congettura fu refutata nel 1957 da Kreisel e Putnam, che dimostrarono che anche IP più "$\sim A \to (B \vee C) \to (\sim A \to B) \vee (\sim A \to C)$" gode di tale proprietà. Dopo di che ci si occupò a più riprese di quale proprietà consentisse di caratterizzare 'dall'alto' IP, mentre fu trascurato il problema simmetrico di stabilire quale calcolo sia caratterizzato 'dall'alto' dalla proprietà della disgiunzione, cioè quale calcolo è massimale tra i calcoli costruttivi. Secondo noi tale problema non è meno rilevante del primo, e nella seconda parte di questa comunicazione forniremo una risposta ad esso.

Concludiamo la prima parte accennando ad alcune delle possibili semantiche con fdv alternative a quella specificata sopra. Innanzitutto, anziché interpretare le fdv mediante valutazioni classiche, potremmo interpretarle mediante modelli di Kripke, cioè definire una relazione di forcing tra i nodi di un frame relazionale opportunamente scelto e fdv. Anche questa opzione verrà precisata in seguito, e vedremo a quale calcolo costruttivo è adeguata una semantica così costruita.

Una volta che si siano immerse le fdv in frames relazionali, ci si può chiedere se non abbia senso ipotizzare una più stretta dipendenza tra le fdv stesse e i nodi del frame, nel senso di concepire la possibilità che le fdv associate a un enunciato varîno al variare dei nodi. In particolare, sono le fdv dell'implicazione che è interessante 'relativizzare' in tal modo ai nodi; per fare questo è sufficiente caratterizzare la classe $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A \to B)$ delle fdv <u>relative</u> di $A \to B$ come $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(B)^{\mathfrak{F}(A) \times K}$, dove K è l'insieme dei nodi del frame $\underline{K}$. Il motivo dell'introduzione delle forme relative è che esse ci permettono di costruire una semantica con fdv adeguata al calcolo intuizionista. Non è escluso che tale semantica possa presentare dei vantaggi rispetto a quella di Kripke, ma per ora tale ipotesi non è stata da noi presa in considerazione.

Oltre alle fdv relative e a quelle 'assolute', si possono introdurre fdv 'miste', nel senso che preciseremo più avanti. L'uso di tali fdv è connesso, come vedremo, con la dimostrazione della massimalità della logica di Kreisel e Putnam rispetto alla proprietà della disgiunzione.

Passiamo ora brevemente in rassegna le logiche (sistemi deduttivi) che permettono di catturare le semantiche a fdv abbozzate nella parte introduttiva. Cominceremo con la logica corrispondente all'interpretazione classica delle fdv, interpretazione che ha costituito il nucleo della discussione introduttiva.

1. La logica F_{cl} (delle fdv a interpretazione classica) è ottenuta aggiungendo a IP lo schema d'assiomi di Kreisel e Putnam

(1) $(\sim A \to (B \vee C)) \to ((\sim A \to B) \vee (\sim A \to C))$

e la famiglia di assiomi

(2) $\sim\sim p \to p$, per ogni variabile proposizionale p.

Si osserverà che, per la presenza degli assiomi (2), F_{cl} <u>non</u> soddisfa la proprità della sostituzione uniforme, cioè esistono formule $A(p_1,\dots,p_n)$ ($p_1,\dots,p_n$ tutte le variabili proposizionali occorrenti in A) e $B_1,\dots,B_n$ tali che $F_{cl} \vdash A(p_1,\dots,p_n)$ ma $F_{cl} \nvdash A(B_1/p_1,\dots,B_n/p_n)$.

La logica F_{cl} è valida e completa rispetto alla nozione di formula costruttivamente valida vista in precedenza, cioè vale

<u>Teorema 1.</u> A è una formula costruttivamente valida sse $F_{cl} \vdash A$.

Questo teorema speciale può essere generalizzato come segue.

- Dato un qualunque insieme $\mathfrak{M}$ di formule, una fdv generalizzata per $\mathfrak{M}$ sarà una qualsiasi funzione $\check{\mathfrak{M}}$ che associa ad ogni $B \in \mathfrak{M}$ una $\check{B} \in \mathfrak{F}(B)$.
- Data una valutazione classica V per le variabili proposizionali, diremo che V verifica $\check{\mathfrak{M}}$ sse V verifica ogni fdv del codominio di $\check{\mathfrak{M}}$.
- Diremo che A è una <u>conseguenza costruttiva</u> di $\mathfrak{M}$ sse $\forall \check{\mathfrak{M}} \exists \check{A} \forall V$ (V verifica $\check{\mathfrak{M}} \Rightarrow$ V verifica $\check{A}$).
- La nozione di derivazione in F_{cl} da un insieme $\mathfrak{M}$ di assunzioni si definisce nel solito modo; la notazione "$\mathfrak{M} \vdash^{F_{cl}} A$" indicherà che A è derivabile utilizzando assunzioni di $\mathfrak{M}$.

Con queste precisazioni, possiamo enunciare il teorema generale di validità e completezza per F_{cl}:

<u>Teorema 2.</u> A è conseguenza costruttiva di $\mathfrak{M}$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{F_{cl}} A$.

Una conseguenza pressoché immediata del Teorema 1 è il seguente risultato, che ci dice che F_{cl} è una logica costruttiva:

<u>Teorema 3.</u> $F_{cl} \vdash A \vee B$ sse $F_{cl} \vdash A$ o $F_{cl} \vdash B$.

F_{cl} è anche una logica costruttiva massimale, nel senso seguente:

- Diremo che una logica L (<u>che può anche non ammettere la proprietà di sostituzione uniforme</u>) è classicamente valida sse tutti i suoi teoremi sono tautologie classiche (ovviamente F_{cl} è classicamente valida).
- Diremo che L è costruttiva sse $L \vdash A \vee B \Rightarrow L \vdash A$ o $L \vdash B$.
- Scriveremo "$L \subseteq L'$" per indicare che tutti i teoremi di L sono teoremi di L'.

Avremo allora:

Teorema 4. Se $F_{cl} \subseteq L$ e L è classicamente valida e costruttiva, allora $L \subseteq F_{cl}$.

Un altro importante risultato su F_{cl} è che essa è una logica liscia nel senso seguente.

- Una sostituzione σ sarà una qualunque funzione che associa formule ben formate (fbf) arbitrarie alle variabili proposizionali. Date A e σ, "$A(\sigma)$" denoterà la formula ottenuta da A applicando (alle variabili di A) la sostituzione σ; analogamente, dato un insieme $\mathfrak{M}$ di fbf, "$\mathfrak{M}(\sigma)$" denoterà l'insieme delle formule ottenute dalle formule di $\mathfrak{M}$ applicando σ.
- Data una logica L, indicheremo con $L \vdash \mathfrak{M}$ il fatto che tutte le formule di $\mathfrak{M}$ sono teoremi di L.
- Scriveremo "$\mathfrak{M} \Vdash^{L} A$" per indicare che $\forall\sigma\ (L \vdash \mathfrak{M}(\sigma) \Rightarrow L \vdash A(\sigma))$.
- Diremo che L è una logica liscia sse $\forall\mathfrak{M}\forall A(\mathfrak{M} \Vdash^{L} A \Rightarrow \mathfrak{M} \vdash^{L} A)$.

Vale il seguente

Teorema 5. F_{cl} è liscia. [1]

F_{cl} ammette anche il lemma di interpolazione, cioè:

Teorema 6. Se $F_{cl} \vdash A \to B$, allora esiste una fbf C tale che le sue variabili occorrono sia in A che in B e $F_{cl} \vdash A \to C$ e $F_{cl} \vdash C \to B$. [2]

Il teorema 6 può essere dimostrato utilizzando opportunamente il seguente teorema delle forme normali.

Teorema 7. Per ogni fbf A esistono fbf $\sim A_1, \ldots, \sim A_m$ tali che $F_{cl} \vdash A \leftrightarrow \sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_m$.

Il teorema 7 fornisce una procedura di decisione per F_{cl}: A è costruttivamente valida sse $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_m$ lo è; quest'ultima formula, essendo una disgiunzione, è costruttivamente valida sse uno dei suoi disgiunti, diciamo $\sim A_i$, lo è; ma $\sim A_i$ è

---

[1] Osserveremo che la proposizione

(P) $\mathfrak{M} \vdash^{L} A \Rightarrow \mathfrak{M} \Vdash^{L} A$

vale per ogni logica con sostituzione uniforme; F_{cl}, che non ha sostituzione uniforme, non soddisfa (P).

Osserveremo anche che la logica intuizionista e quella minimale, in quanto hanno sostituzione uniforme, godono di (P). D'altra parte, queste logiche non sono liscie; per esempio, $\sim A \to B \vee C \Vdash^{IP} (\sim A \to B) \vee (\sim A \to C)$ ma $\sim A \to B \vee C \not\vdash^{IP} (\sim A \to B) \vee (\sim A \to C)$ (diversamente, IP coinciderebbe con la logica di Kreisel Putnam).

[2] Assumiamo qui che F_{cl} sia presentata in un linguaggio in cui $\sim$ non è simbolo primitivo ($\sim A$ abbrevia $A \to \bot$); diversamente, dovremmo distinguere i sottocasi $F_{cl} \vdash \sim A$ e $F_{cl} \vdash B$.

costruttivamente valida, essendo una negazione, sse è classicamente valida. La procedura di decisione ora descritta può essere usata in alternativa a quella diretta che considera, per una data A, l'insieme finito $\mathfrak{F}(A)$ delle fdv di A e che, per ogni $\check{A} \in \mathfrak{F}(A)$, decide se ogni valutazione classica la verifica.

2. Definiamo come segue la nozione di formula elementare: $\bot$ è elementare; ogni variabile proposizionale è elementare; se A e B sono elementari, allora $A \wedge B$ e $A \to B$ sono elementari; nessun'altra formula è elementare.

Siano F_{int} e F_{min} le logiche ottenute aggiungendo, rispettivamente, a IP e alla logica minimale MP, la famiglia d'assiomi (3) $(\mathcal{E} \to (A \vee B)) \to ((\mathcal{E} \to A) \vee (\mathcal{E} \to B))$, per $\mathcal{E}$ formula elementare. Anche F_{int} e F_{min}, come F_{cl}, non hanno sostituzione uniforme.

E' anche facile vedere che vale $F_{min} \subseteq F_{int} \subseteq F_{cl}$ (le inclusioni sono proprie). Vale anche qui un teorema di f.normale:

Teorema 8. Per ogni fbf A, esistono fbf elementari $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m$ tali che $F_{int} \vdash A \leftrightarrow \mathcal{E}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{E}_m$ e $F_{min} \vdash A \leftrightarrow \mathcal{E}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{E}_m$ (le formule elementari sono le stesse per le due logiche).

Veniamo ora alla semantica e ai teoremi di validità e completezza.

- Come è noto, un modello di Kripke per IP è una tripla $\underline{K}_{int} = \langle K, R, \models \rangle$, dove K è un insieme non vuoto di nodi, R una relazione riflessiva e transitiva su K, $\models$ una relazione tra nodi e formule atomiche del linguaggio tale che $k \not\models \bot$ per ogni $k \in K$ e $k \models p \Rightarrow k' \models p$ per ogni variabile proposizionale p e per ogni k,k' tali che kRk'.
- Un modello di Kripke $\underline{K}_{min}$ per MP è definito esattamente come un modello $\underline{K}_{int}$, con l'unica differenza che non vale necessariamente $k \not\models \bot$ per $k \in K$.
- A differenza della semantica kripkiana standard, estenderemo il forcing $\models$ a fdv arbitrarie anziché a fbf arbitrarie. Sia $\underline{K} = \langle K, R, \models \rangle$ indifferentemente un int-modello o un min-modello; definiamo induttivamente $k \models \check{A}$ come segue:
  $k \models \check{\bot}$ sse $k \models \bot$; $k \models \check{p}$ sse $k \models p$;
  $k \models \frac{\check{A}\ \check{B}}{\check{A \wedge B}}$ sse $k \models \check{A}$ e $k \models \check{B}$;
  $k \models \frac{\check{A}}{\check{A \vee B}}$ sse $k \models \check{A}$ (analogamente per $k \models \frac{\check{B}}{\check{A \vee B}}$) ;
  $k \models \check{A \to B}$ sse $\forall k'$ t.c. kRk' $\forall \check{A} \in \mathfrak{F}(A)(k' \models \check{A} \Rightarrow k' \models \check{A \to B}(\check{A}))$, dove $\check{A \to B}(\check{A})$ è la fdv che corrisponde ad $\check{A}$ secondo la funzione $\check{A \to B}$.
- Dati $\underline{K} = \langle K, R, \models \rangle$, $k \in K$ e una fdv generalizzata $\check{\mathfrak{M}}$ per un insieme $\mathfrak{M}$ di fbf, scriveremo "$k \models \check{\mathfrak{M}}$" per indicare che k forza tutte le fbf del codominio di $\check{\mathfrak{M}}$.
- Diremo che A è una F_{int}-conseguenza di $\mathfrak{M}$ - e scriveremo $\mathfrak{M} \models^{F_{int}} A$ - sse $\forall \check{\mathfrak{M}} \exists \check{A}\ \forall \underline{K}_{int} = \langle K, R, \models \rangle \forall k \in K(k \models \check{\mathfrak{M}} \Rightarrow k \models \check{A})$.

La relazione di F_{min}-conseguenza è definita in modo analogo.

Per F_{min} e F_{int} vale il seguente

Teorema 9. $\mathfrak{M} \models^{F_{int}} A$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{F_{int}} A$; $\mathfrak{M} \models^{F_{min}} A$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{F_{min}} A$.

Come conseguenza del teorema 9 otteniamo facilmente il

Teorema 10. $F_{int} \vdash A \vee B$ sse $F_{int} \vdash A$ o $F_{int} \vdash B$; $F_{min} \vdash A \vee B$ sse $F_{min} \vdash A$ o $F_{min} \vdash B$.

Per entrambe le logiche vale il lemma di interpolazione:

Teorema 11. Se $F_{int} \vdash A \to B$ (se $F_{min} \vdash A \to B$), allora esiste una fbf C le cui variabili occorrono sia in A che in B e tale che $F_{int} \vdash A \to C$ e $F_{int} \vdash C \to B$ ($F_{min} \vdash A \to C$ e $F_{min} \vdash C \to B$).

Infine, possiamo dimostrare il seguente teorema che, congiuntamente al Teorema 8, fornisce procedure di decisione per F_{int} e F_{min} basate(rispettivamente)sulla decidibilità di IP e MP:

Teorema 12. Sia ε una fbf elementare e sia $\check{\varepsilon}$ la corrispondente fdv (unica per le fbf elementari); sia $\underline{K}_{int}$ un modello per IP (sia $\underline{K}_{min}$ un modello per MP) e sia $k \in K$; allora $k \models \varepsilon$ sse $k \models \check{\varepsilon}$.

Concluderemo questo punto con un'osservazione che introduce il passaggio dalle fdv assolute a quelle relative, di cui ci occuperemo nel punto 3. La relazione $\mathfrak{M} \models^{F_{int}} A$, definita da "$\forall \check{\mathfrak{M}} \exists \check{A} \forall \underline{K}_{int} = \langle K,R,\models\rangle \forall k \in K\ (k \models \check{\mathfrak{M}} \Rightarrow k \models \check{A})$", si dimostra equivalente alla relazione, apparentemente più debole, $\mathfrak{M} \models^{F_{int}}$ deb A, definita da "$\forall \underline{K}_{int} = \langle K,R,\models\rangle\ \forall k \in K \forall \check{\mathfrak{M}} \exists \check{A}\ (k \models \check{\mathfrak{M}} \Rightarrow k \models \check{A})$". In quest'ultima relazione, la fdv $\check{A}$ da associare a $\check{\mathfrak{M}}$ dipende dalla scelta di $\underline{K}_{int}$. Un risultato analogo vale per F_{min}.

3. Accenneremo ora brevemente alle fdv relative, per mostrare in che senso anche le logiche IP e MP possano essere viste all'interno delle nostre semantiche con fdv. Considereremo solo la logica IP, dal momento che MP si tratta in modo analogo.

Dati un int-modello $\underline{K} = \langle K,R,\models\rangle$ e una fbf arbitraria A, $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A)$ si definisce in modo del tutto analogo a $\mathfrak{F}(A)$, tranne nel caso dell'implicazione; come si è visto nella prima parte, $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A \to B) = \mathfrak{F}_{\underline{K}}(B)^{\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A) \times K}$. L'aspetto rilevante è che le fdv dell'implicazione sono indicizzate dai nodi di $\underline{K}$, cioè sono funzioni che ad ogni coppia $\langle \check{A},k\rangle$ associano una $\check{B}$: è del tutto possibile che, per una data $\check{A}$, $A \overset{\sigma}{\to} B(\langle \check{A},k_1\rangle) \neq A \overset{\sigma}{\to} B(\langle \check{A},k_2\rangle)$, per $k_1 \neq k_2$.

Il forcing delle fdv relative si definisce in modo ovvio per le costanti logiche $\wedge$ e $\vee$; per quanto riguarda l'implicazione, avremo che $k \models A \overset{\sigma}{\to} B$ sse $\forall \check{A} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A) \forall k'$ t.c. kRk' $k' \models \check{A} \Rightarrow k' \models A \overset{\sigma}{\to} B(\langle \check{A},k'\rangle)$

Scriveremo "$\mathfrak{M} \models^{IP}$ A" per esprimere il fatto che $\forall \underline{K} = \langle K,R,\models\rangle$ $\forall k \in K \forall \check{\mathfrak{M}}_{\underline{K}} \exists \check{A} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A)$ t.c. $k \models \check{\mathfrak{M}}_{\underline{K}} \Rightarrow k \models \check{A}$ (dove $\check{\mathfrak{M}}_{\underline{K}}$ dipende a sua volta da $\underline{K}$).

Vale il seguente

Teorema 13. $\mathfrak{M} \models^{IP} A$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{IP} A$.

4. Ci occuperemo ora della logica cui abbiamo accennato nella parte introduttiva, cioè della logica KP di Kreisel e Putnam che si ottiene aggiungendo a IP il solo schema (1). [3] Poiché KP ha solo schemi d'assioma, soddisfa la proprietà della sostituzione uniforme.

Daremo ora una prima semantica per KP, basata sulla nozione di fdv mista. Dato un int-modello $\underline{K} = \langle K,R,\models\rangle$ e data una fbf A, l'insieme $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A)$ è definito induttivamente come segue:

$\check{p} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(p)$ sse $\check{p} = p$; inoltre p non è una fdv assoluta;

$\check{\sim A} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(\sim A)$ sse $\check{\sim A} = \sim A$; inoltre $\sim A$ è una fdv assoluta;

$A \check{\vee} B \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A \vee B)$ sse $A \check{\vee} B = \dfrac{\check{A}}{\check{A} \check{\vee} \check{B}}$ e $\check{A} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A)$, e $A \check{\vee} B$ è ass. sse $\check{A}$ lo è

o $A \check{\vee} B = \dfrac{\check{B}}{\check{A} \check{\vee} \check{B}}$ e $\check{B} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(B)$ e $A \check{\vee} B$ è ass. sse $\check{B}$ lo è;

$A \check{\wedge} B \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A \wedge B)$ sse $A \check{\wedge} B = \dfrac{\check{A}\ \check{B}}{\check{A} \check{\wedge} \check{B}}$ e $\check{A} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A)$ e $\check{B} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(B)$, e $A \check{\wedge} B$ è assoluta sse $\check{A}$ e $\check{B}$ lo sono;

sia $\mathfrak{F}_1(A)$ l'insieme delle fdv assolute di A e sia $\mathfrak{F}_2(A)$ l'insieme delle fdv relative di A; allora $A \overset{\sigma}{\to} B \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(A \to B)$ sse $A \overset{\sigma}{\to} B$ è una funzione di dominio $\mathfrak{F}_1(A) \cup \mathfrak{F}_2(A) \times K$ che associa a ogni elemento del dominio una $\check{B} \in \mathfrak{F}_{\underline{K}}(B)$; inoltre $A \overset{\sigma}{\to} B$ è assoluta sse $\mathfrak{F}_{\underline{K}}(A) = \mathfrak{F}_1(A)$ e ogni fdv del codominio di $A \overset{\sigma}{\to} B$ è assoluta.

Ometteremo per brevità le ovvie definizioni di $k \models \check{A}$ e $\mathfrak{M} \models^{KP} A$.

Vale il seguente

Teorema 14. $\mathfrak{M} \models^{KP} A$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{KP} A$.

Utilizzando il Teorema 14 possiamo dimostrare un importante risultato, che introduciamo nel modo seguente:

- Diremo che A è una conseguenza costruttiva stabile di $\mathfrak{M}$ sse, per ogni sostituzione σ, $A(\sigma)$ è una conseguenza costruttiva di $\mathfrak{M}(\sigma)$ (nel senso visto in precedenza per la logica F_{cl}: la nozione di conseguenza costruttiva stabile richiede dunque la nozione di fdv assoluta).
- Avremo allora:

Teorema 15. A è una conseguenza costruttiva stabile di $\mathfrak{M}$ sse $\mathfrak{M} \vdash^{KP} A$.

---

[3] Per semplificare la definizione di fdv mista, che daremo tra poco, assumeremo che il linguaggio di KP abbia come primitivo.

Si dimostra anche:

Teorema 16. $KP \vdash A \vee B$ sse $KP \vdash A$ o $KP \vdash B$.

Questo è il controesempio di Kreisel e Putnam alla congettura di Lukasiewicz. Ora, utilizzando il Terema 15, possiamo dimostrare che KP è massimale tra le logiche costruttive che godono della proprietà di sostituzione uniforme:

Teorema 17. Sia L una qualunque logica costruttiva tale che $KP \subseteq L$ e L gode della proprietà di sostituzione uniforme: allora $L \subseteq KP$.

Infine, utilizzando il Teorema 17 e il fatto che F_{cl} è liscia, possiamo dimostrare il seguente

Teorema 18. KP è una logica liscia.

Così il controsempio che solitamente si esibisce per mostrare che IP non è liscia (e da noi citato nella nota 1) è essenzialmente l'unico, dal momento che l'aggiunta dello schema (3) a IP dà luogo a una logica liscia. (Ovviamente, (3) è equivalente alla regola di inferenza

$$\frac{\sim A \rightarrow (B \vee C)}{(\sim A \rightarrow B) \vee (\sim A \rightarrow C)}.)$$

Vale infine:

Teorema 19. KP è decidibile.

Osserveremo, per concludere, che KP non ammette lemma di interpolazione; infatti, non è compresa tra le sette logiche proposizionali superintuizioniste con sostituzione uniforme che risultano essere interpolabili secondo un recente risultadi L.L.Maximova ("Craig's Interpolation Theorem and Amalgamable Varieties", Dokl.Akad.Nauk.SSSR, Tom 237 (1977),no.6).