Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

HILBERT E L' "OMEGA-REGOLA"

Enrico Moriconi

Le proposte contenute negli ultimi tre interventi hilbertiani nel campo dei fondamenti della matematica sono in genere rimaste ai margini delle ricostruzioni ed interpretazioni della teoria della dimostrazione, probabilmente per il motivo che già nel 1935 Bernays indicava molto chiaramente: esse costituivano un allontanamento dall'originario programma della teoria della dimostrazione, in quanto lasciavano cadere la richiesta di una formalizzazione totale delle deduzioni.

Dando per scontate queste osservazioni di Bernays, se, almeno, le nuove regole proposte da Hilbert sono depurate di ogni ambiguità e interpretate come vere e proprie ω-regole, vorrei cercare di dare qualche indicazione per districare in parte le ambiguità, appunto, delle proposte hilbertiane.

La nuova regola di inferenza —che Hilbert considera rigorosamente finitista— ha il senso di una introduzione di $\forall$,per cui la indicheremo con ω-$\forall$I. E' diversa da "$A(\underline{a}) \Rightarrow \forall \underline{x}\, A(\underline{x})$" poiché parla solo di formule numeriche in cui il posto libero è saturabile con numerali. Hilbert pensa evidentemente al fatto che, nel caso in cui la formula finale di una derivazione è numerica, l'introduzione di un $\forall$ serve solo per inferirne poi qualche esempio. Ma questo non giustifica ancora: "da una dimostrazione che $A(z^{\circ})$ è vero, per ogni z, concludere $\forall \underline{x} A(\underline{x})$".

In realtà Hilbert lavora con un'ipotesi ulteriore, cioè che sia stata effettuata una prova di coerenza finitista per PA (il che significa che a tutte le formule occorrenti nella prova di un enunciato reale viene associata, secondo un procedimento determinato, una formula numerica). Assumendo che questo procedimento di riduzione funzioni anche per un sistema che incorpori ω-$\forall$I, Hilbert ritiene giustificata l'introduzione di $\forall$ in quanto la premessa di ω-$\forall$I garantisce la verità di tutti gli esempi numerici. E può affermare che ω-$\forall$I abbia carattere finitista poiché la sua giustificazione richiede solo un numero finito di passi (anche se le dimostrazioni sono diventate oggetti infiniti, contengono solo un numero finito di espressioni del tipo $\forall \underline{x}\ A(\underline{x})$).

In questa giustificazione (che non è altro che lo schizzo di una prova di compatibilità) l'assunzione dell'esistenza di una dimostrazione finitista di coerenza per PA funziona in maniera analoga al cosiddetto "dogma di Brouwer" nella dimostrazione brouweriana del *bar-theorem*. L'assunzione che ad ogni prova possiamo associare "una prova pienamente analizzata" implica che "dovunque, nel corso della prova, facciamo appello al fatto che una certa operazione genera un risultato di un certo tipo, allora quell'operazione sarà effettivamente eseguita nella forma analizzata della prova. Ne segue che nella prova pienamente analizzata la quantificazione universale non appare: l'operazione è effettivamente applicata a ciascun elemento del dominio, generando una prova dell'esempio corrispondente, e ciò che nella prova originaria veniva inferito dall'enunciato quantificato universalmente, appare ora come conseguenza degli esempi individuali presi insieme" (Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford, 1977, p. 96).

L'ipotesi interpretativa che vorrei a questo punto avanzare è la seguente: una volta (ritenuto) risolto il problema di provare la coerenza di PA, Hilbert si rivolge ai problemi derivanti dal paradosso di Skolem e dalla possibilità di situazioni ω-inconsistenti e ω-incomplete. Per questi problemi è necessario un raffinamento dei metodi della teoria della dimostrazione e questo si concretizza in un arricchimento del finitismo con porzioni della concezione intuizionista. La costruttività di quest'ultima lo garantivano poi della correttezza del suo procedere. (E' interessante rilevare che quelle che sono diventate le tre usuali condizioni di derivabilità altro non sono che gli assiomi 2. e 3. e la regola d'inferenza che governano la nozione "$\underline{p}$ è provabile", per mezzo della quale Gödel nel 1933 indicò per la prima volta le connessioni esistenti fra logica intuizionista e logica modale.)

In [1930] e in [1931] Hilbert attua una sintesi di trattazione formale e di trattazione informale o contenutistica — che anticipa, in un certo senso, la sostituzione della finitezza con la visualizzabilità — dove gli oggetti principali di studio diventano le dimostrazioni informali (oggetti eventualmente anche infiniti, in quanto si concepisce come "finitisticamente" dominabile anche la formazione di ω rami a partire da un dato nodo). Ma è proprio perché è entrato in questa prospettiva che è arrivato ad introdurre regole non formali (e non finite) del tipo di ω-$\forall$I. E non l' inverso.

Riferimenti

Hilbert D., "Probleme der Grundlegung der Mathematik" Math. Ann. 102 (1929)

"Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre", Math. Ann. 104 (1931) [1930]

"Beweis der Tertium non datur", Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse, [1931].