Estratto da

C. Bernardi (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Siena 7-8-9 gennaio 1982, 15-16-17 aprile 1982, 4-5-6 giugno 1982.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



Claudio Pizzi

# LA DEFINIZIONE DELLE MODALITA' FISICHE NELLA LOGICA DELL'IMPLICAZIONE CONSEQUENZIALE

1. In questa nota viene discusso il rapporto intercorrente tra una particolare logica implicativa e un sistema minimale di logica delle modalità fisiche, derivato dal ben noto calcolo introdotto da A.W.Burks in [1] e ripreso da logici come D.Føllesdal e S.Uchii (v. [2], [8], [9]). Il frammento proposizionale del sistema di Burks, che chiameremo MF, è espresso in un linguaggio che presenta, oltre ai simboli per i connettivi vero-funzionali, i simboli $\Box$ e $\boxed{c}$ per la nozione rispettivamente di necessità logica e di necessità logica-o-fisica, ed è assiomatizzato aggiungendo ad una base per il calcolo standard PC gli assiomi:

A1 $\Box p \supset \boxed{c}p$

A2 $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

A3 $\boxed{c}p \supset p$

A4 $\boxed{c}(p \supset q) \supset (\boxed{c}p \supset \boxed{c}q)$

Regole: Modus Ponens, Sost.Un., $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \Box\alpha$

Chiameremo logica dell'implicazione consequenziale qualsiasi logica il cui linguaggio presenti, oltre ai simboli di PC, il simbolo per l'implicazione chiamata 'connessiva' da S.McCall (cfr. p.es. [3]), il simbolo '$\divideontimes$' per l'operatore c.d. circostanziale (tale che '$\divideontimes\alpha$' si legga "$\alpha$ ceteris paribus") e i simboli ausiliari $\top =_{Df} s \vee \sim s$, $\bot =_{Df} \sim\top$, $\Box\alpha =_{Df} \top \rightarrow \alpha$.

Gli assiomi per una logica minimale dell'implicazione consequenziale analitica, denominata CAi.0 in [5], sono:

B1 $(p \rightarrow \bot) \supset (\bot \rightarrow p)$

B2 $(\bot \rightarrow p) \supset (p \rightarrow \bot)$

B3 $\sim(p \rightarrow \sim p)$

B4 $(p \rightarrow q) \supset (p \supset q)$

B5 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \supset (p \rightarrow q)$

B6 $(p \rightarrow q) \supset (\sim q \rightarrow \sim p)$

B7 $(\Box(p \supset q) \wedge (\Diamond p \wedge \sim\Box q)) \supset p \rightarrow q$

B8 $\Diamond(p \wedge q) \supset ((p \rightarrow r) \supset (p \wedge q \rightarrow r \wedge q))$

Regole: Modus Ponens per '$\supset$'; Sost.Un.

Per ottenere una logica dell'implicazione consequenziale sia analitica che sintetica ,che denomineremo CAi$*$0, vanno aggiunti a CAi.0 gli assiomi

B9 $*p \rightarrow p$ B10 $*p \wedge q \longrightarrow *q \wedge p$

Si noti che in CAi$*$0 la c.d. "legge del fattore" $(p \rightarrow r) \sqsupset (p \wedge q \rightarrow r \wedge q)$ si presenta nella variante $\Diamond(p \wedge q) \sqsupset ((p \rightarrow r) \sqsupset (p \wedge q \rightarrow r \wedge q))$. Oltre ad essere molto attendibile intuitivamente, questo indebolimento rende dimostrabile l'equivalenza tra CAi.0 e il sistema T di Feys esteso con la definizione $\alpha \rightarrow \beta =_{Df} \Box(\alpha \sqsupset \beta) \wedge (\Box\beta \sqsupset \Box\alpha) \wedge (\Diamond\beta \sqsupset \Diamond\alpha)$ (cfr. [4]). Entro la logica CAi$*$0 è possibile definire un simbolo per l'operatore condizionale, poniamo $>$ , mediante $\alpha > \beta =_{Df} *\alpha \rightarrow \beta$ .

Un modo molto attendibile per definire le modalità fisiche usando come base CAi$*$0 è quello di usare un'estensione linguistica e assiomatica di questo sistema che consenta di operare con quantificatori proposizionali. In primo luogo verrà introdotta un'estensione linguistica e assiomatica di MF, MF$\pi$, in cui gli assiomi e le regole quantificazionali standard sono interpretabili in termini di quantificazione proposizionale. A questa base si può aggiungere una definizione dell'operatore circostanziale come questa: $*\alpha =_{Df} \alpha \wedge \forall q (\boxed{c}(\alpha \sqsupset q) \sqsupset q)$, dove $q$ non è tra le variabili di $\alpha$ (cioè: $\alpha$ è vera insieme a tutti gli enunciati che è impossibile siano falsi se congiunti ad $\alpha$). Parallelamente a come si è operato con MF si può operare con CAi$*$0, la cui estensione con quantificatori proposizionali verrà chiamata CAi$*$0$\pi$. Una definizione intuitiva di $\boxed{c}$ in CAi$*$0$\pi$ è data da $\boxed{c}\alpha =_{Df} \exists q (*q \wedge *q \rightarrow \alpha)$, dove $q$ non è tra le variabili di $\alpha$.

2. Veniamo ora alla relazione intercorrente tra il sistema MF$\pi$ +Def$*$ e il sistema CAi$*$0$\pi$+Def$\boxed{c}$. Valgono i due seguenti metateoremi:

MT1. <u>Ogni tesi di MF$\pi$ +Def$*$ è una tesi di CAi$*$0$\pi$ +Def $\boxed{c}$</u>

Senza entrare nei dettagli della dimostrazione basta osservare quanto segue:



(1) I teoremi di ambedue i sistemi contenenti il solo $\Box$ sono gli stessi del sistema T

(2) A1 segue da $(*\mathbf{T} \rightarrow p) \sqsupset \exists q (*q \wedge (*q \rightarrow p))$ e $(\mathbf{T} \rightarrow p) \sqsupset (*\mathbf{T} \rightarrow p)$

(3) A3 segue dalla quantificazione esistenziale su $(*\mathbf{T} \wedge (*\mathbf{T} \rightarrow p)) \sqsupset p$ e A4 da quella universale su $*r \rightarrow (p \sqsupset q) \sqsupset ((*r \rightarrow p) \sqsupset (*r \rightarrow q))$

(4) L'equivalenza generata da Def$*$ si ottiene

(a) dimostrando $*p \sqsupset (p \wedge \forall q (\exists r (*r \wedge (*r \rightarrow p \sqsupset q)) \sqsupset q))$ a partire da $*p \sqsupset (p \wedge (*p \rightarrow (p \sqsupset q)) \sqsupset q)$

(b) dimostrando la conversa della precedente a partire dall'ipotesi $p \wedge (*r \wedge (*r \rightarrow (p \sqsupset q)) \sqsupset q)$ (il cui secondo congiunto è una tesi, equivalente alla sua quantificazione esistenziale) e applicando l'equivalenza $(p \wedge *r) \equiv (*p \wedge *r)$

MT2. <u>Ogni tesi di CAi$*$0$\pi$+ Def$\boxed{c}$ è una tesi di MF$\pi$ + Def$*$</u>

Si osservi al proposito quanto segue:

(1) $*p \rightarrow p$ equivale a $(p \wedge \forall q (\boxed{c}(p \sqsupset q) \sqsupset q)) \rightarrow p$, ossia a $\Box((p \wedge \forall q (\boxed{c}(p \sqsupset q) \sqsupset q)) \sqsupset p) \wedge (\Box p \sqsupset \Box(p \wedge \forall q (\boxed{c}(p \sqsupset q) \sqsupset q))) \wedge (\Diamond p \sqsupset \Diamond(p \wedge \forall q (\boxed{c}(p \sqsupset q) \sqsupset q)))$

I secondi due congiunti si ottengono partendo dalla tesi $p \sqsupset ((p \wedge \boxed{c}(p \sqsupset q)) \sqsupset q)$

(2) $*p \wedge q \rightarrow *q \wedge p$ equivale a $p \wedge \forall s (\boxed{c}(p \sqsupset s) \sqsupset s) \wedge q \rightarrow q \wedge \forall s (\boxed{c}(q \sqsupset s) \sqsupset s) \wedge p$ che si può dimostrare partendo dalla tesi $\boxed{c}((p \sqsupset s) \sqsupset s) \wedge q) \sqsupset \boxed{c}((q \sqsupset s) \sqsupset s)$

(3) L'equivalenza corrispondente a Def$\boxed{c}$ , ossia $\boxed{c}p \equiv \exists q ((q \wedge \forall s \boxed{c}(q \sqsupset s) \sqsupset s)) \wedge ((q \wedge \forall s \boxed{c}(q \sqsupset s) \sqsupset s)) \longrightarrow p)$ si dimostra in una direzione partendo dalla tesi $(\Box p \wedge \forall s \boxed{c}((\Box p \sqsupset s) \sqsupset s) \sqsupset \boxed{c}p$ , nell'altra osservando che <u>c'è</u> almeno una formula che gode della proprietà attribuite nella formula alla variabile $q$, ossia $\Diamond_{c} p \wedge p$ . In particolare vale

$$\boxed{c}p \sqsupset \begin{cases} \Box((\Diamond_{c} p \wedge p) \wedge \forall s (\boxed{c}(q \sqsupset s) \sqsupset s)) \sqsupset p) \\ \Box p \sqsupset \Box((\Diamond_{c} p \wedge p) \wedge \forall s (\boxed{c}(((\Diamond_{c} p \wedge p) \sqsupset s) \sqsupset s) \\ \Diamond p \sqsupset \Diamond((\Diamond_{c} p \wedge p) \wedge \forall s (\boxed{c}((\Diamond_{c} p \wedge p) \sqsupset s) \sqsupset s) \end{cases}$$

da cui il risultato segue per la Definizione di '$\longrightarrow$'

Da MI1 e MT2 segue l'equivalenza deduttiva di MF$\pi$ +Def$*$ e CAi$*$0 + Def $\boxed{c}$

3.Un recente risultato(dimostrato in [6]) circa $CAi{*}0$ prova che questo sistema è eccessivamente forte in quanto il suo frammento condizionale contiene la"formula-collasso" $p \sqsupset {*}p$ . Poichè in base a un semplice ragionamento semantico si dimostra che in $MF_{\pi}$ non compare $p \sqsupset \boxed{c}p$ , ne segue come risultato collaterale che tanto in $MF_{\pi}$ che in $CAi{*}0_{\pi}$ non c'è collasso di $\boxed{c}$ su $*$ . Tuttavia la presenza della tesi $p \sqsupset {*}p$ rende inaccettabile $CAi{*}\,0$ come sistema di logica per l'implicazione sintetica. Una sua variante priva di collasso(chiamata $CAw{*}0$ in[6]) si ottiene restringendo la regola di Sostituzione Uniforme in modo tale che,se le variabili atomiche sono precedute da un operatore circostanziale, ad esse si sostituiscano solo formule che siano(a)non-tesi di CAi.0 (b)esempi di non-tesi di CAi.0 contenenti formule di forma ${*}\beta$ ,dove $\beta$ è una non-tesi di CAi.0 . Le altre regole di $CAw{*}\,0$ sono il Modus Ponens per'$\sqsupset$' e la regola $\vdash \alpha \longrightarrow \vdash {*}\alpha$ .

Ora,se $CAw{*}0_{\pi}$ è l'estensione di $CAw{*}\,0$ con quantificatori proposizionali,è immediato vedere che $CAw{*}\,0_{\pi}$ è sottosistema di $CAi{*}0_{\pi}$ e quindi,grazie a MT2,sottosistema di $MF_{\pi}$+Def$*$ .Questo risultato pone di fronte all'esigenza di riconnotare le modalità fisiche nel sistema $CAw{*}\,0$.Per la nozione di necessità logica-o-fisica si può proporre come definizione $\boxed{c}^{1}\alpha =_{Df} (\mathrm{T} \rightarrow \alpha) \vee \exists p(p \neq \alpha \wedge {*}p \wedge ({*}p \rightarrow \alpha))$ ,dove $\alpha \neq \beta =_{Df} \sim(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \sim(\beta \rightarrow \alpha)$ .Per la nozione di necessità fisica in senso forte è sufficiente introdurre un operatore $\boxtimes\alpha =_{Df} \boxed{c}^{1}\alpha \wedge \sim\Box\alpha$ ,che è spesso stato invocato come un'utile alternativa all'operatore $\boxed{c}$ di Burks(v.Rescher [7] ).Nel caso $p$ preceda temporalmente $\alpha$, $\boxed{c}^{1}$ va inteso più correttamente come un operatore per l'inevitabilità.Volendo,questa nozione con un'opportuna estensione linguistica può essere resa da

$$\boxdot\alpha_{t''} =_{Df} \exists p(p_{t'} \neq \alpha_{t''} \wedge {*}p_{t'} \wedge ({*}p_{t'} \rightarrow \alpha_{t''}))(t'' > t')$$



La questione che viene aperta in questo modo è quella di determinare la base assiomatica in grado di generare il frammento di $CAw{*}\,0$ contenente formule in $\boxed{c}^{1}$ .Per quanto il problema non sia ancora stato studiato,è una congettura attendibile,alla luce di MT2,che questo frammento si presenti strutturalmente analogo a $MF_{\pi}$ .

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI


[1] Burks,A.W.,"The Logic of Causal Propositions", Mind 1951,vol.60,pp.363-382(trad.it. in AA.VV. , "Leggi di natura,modalità,ipotesi",Milano 1978 )

[2] Føllesdal,D.,"A Model-theoretic Approach to Causal Logic",in "Det Kgl Norske Videnskabers Selskabs Skrifter",1966,2,Trondheim(trad.it. in AA.VV.,cit in 1 )

[3] McCall,S.,"Time and the Physical Modalities", The Monist,1959,vol.53,pp.426-446

[4] Pizzi,C.,"Boethius' Thesis and Conditional Logic",Journal of Phil.Logic,1977,vol.6,pp.283-302

[5] Pizzi,C. ,"Una procedura di decisione mediante tableaux per una logica connessiva debole " , Bollettino del Dip.di Filosofia Un.della Calabria,vol.4,1982(in corso di pubblicazione)

[6] Pizzi,C. ,"Una teoria consequenzialista dei condizionali",Bibliopolis,Napoli(di prossima pubblicazione)

[7] Rescher,N. ,rec. di Burks[1],Journal of Symb. Log. ,1951,vol.16,pp.277-278



Istituto di Filosofia e Scienze Sociali
Università di Siena