Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

LA CONVERGENZA ALLA LUCE DELLA SEMANTICA CATEGORIALE

BARBARA VEIT

1. Nell'ambito di una riformulazione di varie nozioni matematiche (se non di tutta la matematica) in un quadro categoriale, si pone, prima o poi, il problema di studiare anche la nozione di convergenza. Vi sono varie definizioni possibili in termini di successioni di numeri reali, classicamente tutte equivalenti; siamo andati a vedere come esse si interpretano e quali rapporti hanno tra di loro in alcuni topos con un anello R che gioca il ruolo di $\mathbb{R}$ negli insiemi, e precisamente:

- TOP, il topos dei fasci sopra il sito costituito dagli spazi topologici con le applicazioni continue e i ricoprimenti aperti; come anello di base R scegliamo il fascio rappresentato dallo spazio $\mathbb{R}$: per uno spazio X, sarà $R(X) = C^{o}(X,\mathbb{R})$;
- $\mathbb{E}$, il topos associato al sito i cui oggetti sono gli aperti dei vari $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 0)$, i morfismi sono le mappe C^∞ tra aperti, e le coperture sono i ricoprimenti aperti (topos che coincide peraltro con quello associato al sito $\mathbb{M}$f delle varietà C^∞); qui, R è ancora il fascio rappresentato da $\mathbb{R}$, perciò viene $R(U)=C^\infty(U)$ per un aperto U;
- $\mathbb{B}$ (risp. $\mathbb{B}_c$), il topos sopra il sito che ha per oggetti le (duali delle) algebre C^∞ di tipo finito, i.e. anelli di tipo $C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$, dove I è un ideale locale nel caso di $\mathbb{B}$ (risp. chiuso nel caso di $\mathbb{B}_c$); un morfismo da $C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ a $C^\infty(\mathbb{R}^k)/J$ è un omomorfismo indotto da una mappa C^∞ da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$, e le coperture sono indotte da ri-

Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA con un contributo del Ministère de l'Education du Québec.

coprimenti aperti dei vari $\mathbb{R}^m$. La nostra scelta di R in $\mathbb{B}$ e in $\mathbb{B}_c$ è motivata dal fatto che, associando ad ogni varietà M il fascio rappresentato da $C^\infty(M)^{op}$, si ottiene un'immersione piena $j: \mathbb{M}f \hookrightarrow \mathbb{B}$ che si fattorizza attraverso l'immersione $\mathbb{B}_c \hookrightarrow \mathbb{B}$. Definiremo perciò $R = j(\mathbb{R})$ nei due casi. Essendo peraltro $C^\infty(\mathbb{R})$ l'algebra C^∞ libera con un generatore, viene $R(X)=X$ per ogni oggetto X nei due siti considerati (cfr. A.Kock, Synthetic Differential Geometry, Cambridge 1981).

2. Indicato con N l'oggetto dei numeri reali, diciamo che una successione $s = (s_n) \in R^N$ è di Cauchy se verifica

(C): $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n \in N \quad \forall\ m,k > n \quad |s_m - s_k| < \varepsilon$.

In TOP, le successioni di Cauchy al livello di uno spazio X sono le $(s_n) \in R^N(X) = R(X)^{\mathbb{N}}$ che verificano (esternamente):

(*): esiste $l: X \to \mathbb{R}$ tale che, dato $\varepsilon > 0$, esiste per ogni $x \in X$ un $n_x \in \mathbb{N}$ e un intorno dove vale $|s_n - l| < \varepsilon$ non appena $n > n_x$.

Si vede subito che (*) implica la convergenza uniforme sui compatti (CUC); la reciproca vale estesamente, per esempio negli spazi loc. compatti e in quelli secondo numerabili. Vi sono tuttavia controesempi già tra gli spazi completamente regolari: consideriamo, per esempio, lo spazio di Appert costruito sopra gli interi positivi dichiarando aperto ogni sottoinsieme che non contenga 1, nonché gli S con $1 \in S$ t.c. al crescere di n in $\mathbb{N}$, il rapporto tra il numero degli elementi di S minori di n e n converga verso 1. Diamo due esempi di successioni CUC che non sono internamente di Cauchy:

(a): esempio con un limite discontinuo (in 1):

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=1 \text{ oppure } x \geqslant n, \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

(b) $$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=n, \text{ ma } x \neq 1, \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

questa successione è CUC verso una funzione continua, ma (*) non è verificata.

Nel caso di TOP, dunque, la semantica categoriale offre, con la condizione (*), un'interessante alternativa alla nozione di CUC, specie negli spazi con "pochi" compatti; inoltre, questa convergenza è locale. Ma c'è di più: la condizione (*) garantisce che il limite è sempre continuo; infatti, R è l'oggetto dei reali di Dedekind in TOP, quindi ogni successione di Cauchy possiede un limite, cioè vale

(L): $\exists\ l \in R \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n \in N \quad \forall\ m > n \quad |s_m - l| < \varepsilon$.

In $\mathbb{E}$, invece, le successioni di Cauchy si interpretano, su un aperto U, come le successioni $(s_n) \in R^N(U) = R(U)^{\mathbb{N}}$ che sono CUC su U, mentre (L) è soddisfatta sse inoltre la funzione limite è C^∞. In $\mathbb{B}$ come in $\mathbb{B}_c$, la situazione è analoga: se $X = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$, allora $(\bar{s}_n) \in X^{\mathbb{N}}$ è di Cauchy (internamente) sse $(s_n | \mathrm{pt}\, I)$ è CUC su pt I, dove pt I = $= \{ x \in \mathbb{R}^m \mid f \in I \Rightarrow f(x)=0 \}$ sono i "punti" di I, con la topologia indotta; (L) impone inoltre che il limite sia C^∞ su pt I.

3. Nel tentativo di ottenere nozioni di convergenza più significative per la struttura differenziale di R in $\mathbb{E}$, in $\mathbb{B}$ e in $\mathbb{B}_c$, abbiamo esaminato anche la seguente convergenza funzionale, cioè

(F): $\exists\ f \in R^R \quad \forall\ n \in N \quad s_n = f(\frac{1}{n+1})$.

Chiaramente, (F) implica (L) se le funzioni in R^R sono continue: basta porre $l = f(0)$; diciamo allora che s converge funzionalmente verso 1[(°)].

In TOP, la condizione (F) risulta ancora equivalente alle precedenti, mentre già in $\mathbb{E}$ manifesta degli inconvenienti: per la successione

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall\ U, \quad \forall\ x \in U$$

non può esistere (neanche localmente) una $f \in R^R(U) = R(\mathbb{R} \times U)$ che verifichi (F), visto che si avrebbe:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\Big|_{t=0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1/n} - \sqrt{1/n+1}}{1/n - 1/n+1} = \infty .$$

La (F) si può comunque indebolire con la seguente <u>convergenza modulo le sottosuccessioni</u>

(S): esiste $l \in R$ tale che ogni sottosuccessione s' di s possiede una sottosuccessione s" che converge funzionalmente verso l.

Abbiamo allora l'incoraggiante risultato:

In $\mathbb{E}$, data $s \in R^N$ al livello di un aperto U, essa soddisfa (S) sse $s = (s_n)$ converge, insieme a tutte le sue derivate, nel senso della convergenza uniforme sui compatti.

In $\mathbb{E}$, dunque, l'obiettivo di collegare la convergenza con la struttura differenziale si raggiunge con (S).

4. Vediamo dunque qual'è la situazione in $\mathbb{B}$ e in $\mathbb{B}_c$ che sono modelli della geometria differenziale sintetica. Qui, l'oggetto

(°) Segnaliamo che, in presenza di un oggetto N* che gioca il ruolo della compattificazione di N, si può dare la seguente condizione suggerita da J. Penon (si noti che è di 1° ordine):

$$(N^*) \quad \forall\ n \in N^* \quad \exists\ r \in R \quad (n \in N \Longrightarrow r = s_n) .$$

Non solo classicamente, ma anche in TOP, in $\mathbb{B}$ e in $\mathbb{B}_c$, (N*) risulta equivalente a (F) se per N* si prende il fascio rappresentato da $\mathbb{N}^*$ in TOP, risp. da $C^\infty(\mathbb{R})/\{f \mid f=0 \text{ su } \mathbb{N}^*\}$ in $\mathbb{B}$ e in $\mathbb{B}_c$.

"ideale" da catturare con una definizione della convergenza sarebbe quello definito, per ogni $X = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$, come

$$D(X) = \{(s_n) \in R^N(X) \mid \text{esiste } (t_n) \text{ in } C^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ equivalente mod } I$$
$$\text{a } (s_n), \text{ e che converge CUC con tutte le sue derivate}\}^*$$

Va detto anzitutto che D costituisce effettivamente un fascio (lo si vede usande le partizioni dell'unità), e che si ha $D \subset (L)$ nonché $(F) \subset D \subset (S)$, con inclusioni proprie che ora discuteremo.

a) Un controesempio per $D \subset (F)$ è la successione $(1/\sqrt{n})$ già discusso in 3. Comunque, vi si può rimediare prendendo, invece di (F), la

$$(F^*): \quad \exists\ f \in R^R \quad \exists\ \alpha > 0 \quad \forall\ n \in N \qquad s_n = f(\tfrac{1}{(n+1)}\alpha).$$

Tuttavia, con un po' di fantasia si scoprono nuovamente, già tra le sezioni globali di R^N (e cioè tra le usuali successioni di numeri reali), elementi che sfuggono a (F*) pur essendo banalmente in D.

b) Si impone quindi un'ulteriore indebolimento di (F). Questa volta, però, il passaggio attraverso le sottosuccessioni dà decisamente troppe successioni: vediamo subito un tipico esempio. Sia C l'insieme di Cantor, e $X = C^\infty(\mathbb{R})/\{f \mid f = 0 \text{ su } C\}$; siano m_n $(n \geqslant 0)$ i punti medi di $(0, \frac{1}{3^n})$, e I_n gli intervalli (m_{n+1}, m_n). Consideriamo le funzioni (f_n) dovunque nulle salvo su I_n: $(f_n|C)$ ammette un'estensione (g_n) che è C^∞ su tutto $\mathbb{R}$ e converge CUC verso la funzione 0. Passando al quoziente, otteniamo dunque con $(\bar{g}_n)$ una successione che soddisfa (L) al livello di X. Ma $(\bar{g}_n)$ non è certamente in D(X): comunque si scelgano i rappresentanti g_n, sarà sempre $g'_n = 1$ su $I_n \cap C$, e $g'_n =$

(*) Nel contesto di questo lavoro, la differenza tra $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}_c$ è precisamente che $\mathbb{B}_c \models$ ogni (s_n) in D ammette un' <u>unico</u> limite, cosa falsa in $\mathbb{B}$. A prima vista, quindi, $\mathbb{B}_c$ appare come un topos più appropriato per lo studio della convergenza.

$=0$ su $C-I_n$. Vedremo tuttavia che $(\bar{g}_n)$ soddisfa (S): dare una sottosuccessione s' di una successione s significa dare $\sigma \in N^N$ che sia crescente e porre $s'_n = s_{\sigma(n)}$. Ora, dato che C è 'poco' connesso, comunque sia data σ, si può definire

$$\tau_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{se } \exists\, m \leqslant n \text{ con } \sigma_m(x)=k \text{ e } x \in I_k \\ n & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e si avrà allora $s_{\tau\sigma} = 0$ poiché τ "salta" i valori critici: nei punti di $I_n \cap C$, $\tau\sigma$ non assume mai il valore n.

Il fatto è che l'oggetto N è molto sensibile alla topologia degli insiemi dei punti (=sezioni globali) dei singoli oggetti del sito sottostante: se (come in $\mathbb{E}$), pt X è sempre localmente connesso, allora N^N è il fascio costante $\Delta(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, ossia, almeno localmente, le nozioni interne e esterne di sottosuccessione coincidono: se una successione come la nostra $(\bar{g}_n)$ presenta delle anomalie per tutti i valori di n, non è possibile eliminarli con il passaggio alle sottosuccessioni che eludono abilmente la parte critica a seconda del punto nel quale vengono valutate.

Osserviamo, per inciso, che in TOP abbiamo un fenomeno analogo: la successione delle derivate di $(g_n|C)$ mostra, al livello di C, che (S) $\not\Longrightarrow$ (C).

Ci si potrebbe allora rassegnare a rafforzare (S) sostituendo le sottosuccessioni interne con sottosuccessioni esterne, usando cioè $\Delta(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ invece di N^N nella sua formalizzazione. Ma nasce subito un nuovo problema dovuto al fatto che gli elementi di R(X) sono sempre e soltanto dei rappresentanti di funzioni modulo un ideale: dalla esistenza in D di una famiglia di <u>rappresentanti</u> in <u>dipendenza</u>

dalle singole sottosuccessioni s' considerate, non segue l'esistenza di un rappresentante in D per <u>tutta</u> la successione s.

*****

Oltre al valore teratologico di queste considerazioni, sembra poter ravvisare in esse una conferma della felice scelta dell'approccio sintetico (e non analitico) alla geometria differenziale in un ambito categoriale. Del resto, un recente lavoro di I. Moerdijk e G.E.Reyes, <u>Smooth spaces versus continuous spaces in models for synthetic differential geometry</u>, Amsterdam 1983, analizza precisamente i rapporti tra spazi continui e spazi 'lisci', spiegando come l'analisi intuizionista (che potrebbe essere maggiormente interessata ad un'indagine come questa) trovi un'interpretazione più appropriata negli spazi continui.