Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



# ALCUNE BUONE PROPRIETA' DELLA LOGICA DI CHANG.

*Antonio Vincenzi*

La logica $L(C)$ é stata introdotta da Chang (in [Ch]) come generalizzazione semantica della *"Pragmstics"* di Montague (v. [Mo]). La sua *sintassi* estende quella del prim'ordine con un operatore $C$ tale che, se $\varphi$ é una formula e t é un termine (relativi ad un qualsiasi tipo $\tau$), allora anche $Ct\varphi$ é una formula (detta *formula individualizzata*). Le eventuali variabili libere presenti in t restano tali in $Ct\varphi$. La *semantica* di $L(C)$ si basa su delle strutture $\mathfrak{A} = \langle \|\mathfrak{A}\|, C^{\mathfrak{A}} \rangle$, in cui $\|\mathfrak{A}\|$ é una ordinaria struttura del prim'ordine (con universo $A$) e $C^{\mathfrak{A}}$ é un'arbitraria funzione da $A$ a $\mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$ e definisce

$$\mathfrak{A} \models_C Ct\varphi \iff \{t \in A \mid \langle \mathfrak{A}, t \rangle \models_C \varphi(t)\} \in C^{\mathfrak{A}}(t).$$

**Osservazione.** Le logiche $L(Q_{mon})$, $L(Int)$ e le logiche modali (quantificate) MC-T, MC-S4 ed MC-S5 sono casi particolari di $L(C)$ (v. [MM]). $C$ é un quantificatore nel senso specificato in [Mu,III,p.9].

Facendo riferimento a [Ba],[Je] e [Mu] per le notazioni, enunciamo ora i risultati provati in [Vi1] e [Vi2].

**Teorema 1.** $L(C)$ *é una logica generalizzata con relativizzazione.*

**Teorema 2.** (Riduzione alla logica proposizionale) *Sia* $\tau$ *un tipo e* $\tau(C)$ *una sua espansione con testimoni. Sia* $Eq' = Eq \cup \{[a=b \to [Ca\varphi \to Cb\varphi]] \mid \varphi$ *formula di* $\tau(C)\}$ *e sia* $\nu$ *una funzione che assegna un valore di verità ad ogni formula* *atomica o individualizzata di* $\tau(\mathrm{C})$. *Allora, per ogni insieme* T *di C-formule di tipo* $\tau$, *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*i*) *c'é una C-struttura di tipo* $\tau$ $\mathfrak{A}\models_C \mathrm{T}$;

(*ii*) *c'é una C-struttura canonica di tipo* $\tau(\mathrm{C})$ $\mathfrak{A}^+$ *tale che* $\mathfrak{A}^+\models_C \mathrm{T}$;

(*iii*) $\mathrm{T}\cup\mathrm{T}_{Henkin}\cup\mathrm{Eq}'$ *é consistente nel senso della logica proposizionale.*

**Teorema 3.** (Compattezza) *Ogni insieme* T *di C-enunciati ha un C-modello sse ogni suo sottoinsieme finito ha un C-modello.*

**Teorema 4.** (Proprietà di Löwenheim-Skolem) *Se un insieme* T *di C-enunciati ha un C-modello, allora ha un C-modello numerabile.*

**Osservazione.** I Teoremi 3 e 4 vengono provati in [Ch] come conseguenze del Teorema di Łos.

**Teorema 5.** (Proprietà di Fraissé-Ehrenfeucht) *Date due C-strutture* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *di tipo* $\tau$, *se* $\cong_C^\omega$ *é la relazione di C-isomorfismo* $\omega$*-parziale, allora* $\mathfrak{A}\cong_C^\omega\mathfrak{B}$ *sse* $\mathfrak{A}\equiv_C\mathfrak{B}$.

**Teorema 6.** $\mathrm{L}(\mathcal{C})$ *ha la proprietà di conservazione per i prodotti ma non per le sottostrutture.*

**Osservazione.** I Teoremi 5 e 6 risolvono parzialmente il Problema 2 posto in [Ch].

**Teorema 7.** *Data una C-struttura* $\mathfrak{A}$ *di tipo* $\tau$, *sia* $\mathrm{D}_C(\mathfrak{A}_A)$ *l'insieme degli enunciati atomici o individualizzati di tipo* $\tau_A$ *e delle loro negazioni. Allora, data una funzione*



$f{:}A\longrightarrow B$, *si ha che:*

(*i*) *f é una C-immersione isomorfa di* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *sse*

$$\mathfrak{B}_{f(A)}\models_C \mathrm{D}_C(\mathfrak{A}_A);$$

(*ii*) *f é una C-immersione elementare di* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *sse*

$$\mathfrak{B}_{f(A)}\models_C \mathrm{Th}_C(\mathfrak{A}_A).$$

**Teorema 8.** (Consistenza di Robinson) *Per ogni C-struttura* $\mathfrak{A}$ *di tipo* $\tau'$ *ed ogni C-struttura* $\mathfrak{B}$ *di tipo* $\tau''$ *tali che*

$$\mathfrak{A}\restriction\tau'\cap\tau''\equiv_C\mathfrak{B}\restriction\tau'\cap\tau'',$$

*esiste una C-struttura* $\mathfrak{M}$ *di tipo* $\tau'\cup\tau''$ *tale che*

$$\mathfrak{M}\restriction\tau'\equiv_C\mathfrak{A}\quad e\quad \mathfrak{M}\restriction\tau''\equiv_C\mathfrak{B}.$$

**Teorema 9.** (Interpolazione di Craig) *Se* $\mathrm{K}_1$ *e* $\mathrm{K}_2$ *sono due classi C-proiettive disgiunte relative al tipo* $\tau$, *allora esiste una classe C-elementare* H *relativa al tipo* $\tau$, *tale che* $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{H}$ *e* $\mathrm{K}_2\subseteq\mathrm{H}^*$ *(essendo* $\mathrm{H}^*$ *il complementare di* H*).*

**Teorema 10.** (Definibilità di Beth) *Sia* R *un simbolo relazione ad n posti ed* H *una classe C-elementare relativa al tipo* $\tau\cup\{\mathrm{R}\}$. *Se per ogni C-struttura* $\mathfrak{A}$ *di tipo* $\tau$ *esiste al più una struttura* $\mathfrak{B}\in\mathrm{H}$ *tale che* $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\restriction\tau$, *allora esiste una C-formula* $\varphi$ *di tipo* $\tau$ *tale che* $\mathrm{R}^{\mathfrak{B}}=\varphi^{\mathfrak{B}\restriction\tau}$, *per ogni* $\mathfrak{B}\in\mathrm{H}$.

**Teorema 11.** ($\Delta$-chiusura) *Se* K *e* $\mathrm{K}^*$ *sono C-proiettive, allora* K *é C-elementare (relativamente ad un tipo* $\tau$*).*

**Osservazione.** Gli ultimi quattro Teoremi sono stati ottenuti utilizzando alcuni risultati della *Teoria Astratta dei Modelli*. I Teoremi 8,9 e 10 risolvono il Problema 3 posto in [Ch].

## RIFERIMENTI


[Ba] Barwise,J.: *An Introduction to First-Order Logic.* In: Barwise,J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland (1977).

[Ch] Chang,C.C.: *Modal model theory.* In: *Proceedings of the Cambridge Summer School in Mathematical Logic.* Springer Lecture Notes in Math. 337 (1971).

[Je] Jensen,F.V.: *Interpolation and Definibility in Abstract Logics.* Synthese **27** (1974), 251-257.

[MM] Makowsky,J.A., Marcja,A.: *Completeness theorems for modal model theory with the Montague-Chang semantics.* Zeitschr. Math. Logik **23** (1977), 97-104.

[Mo] Montague,R.: *Pragmatics.* In: Klibansky,R. (ed.) *Contemporary Philosophy, a survey.* La Nuova Italia (1968).

[Mu] Mundici,D.: *Lectures on Abstract Model Theory I, II, III.* Quaderni dell'Istituto Matematico "U. Dini" di Firenze, n. 6,7,14 (1981/82).

[Vi1] Vincenzi,A.: *Robinson Consistency Property for Chang's Logic.* In preparazione.

[Vi2] Vincenzi,A.: *Back and Forth through Chang's Logic.* In preparazione.