Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Intervento di Ettore Casari

PER UNA DISCUSSIONE SUI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA.

Le poche e iperschematiche annotazioni che seguono mirano soltanto a cercar di evitare che la discussione intorno alla situazione attuale della indagine sui fondamenti della matematica si sviluppi entro un quadro tematico e problematico troppo angusto e datato.

1. Almeno a partire dal mondo greco, allo sviluppo della matematica si è venuto affiancando quello di tutta una serie di questioni e riflessioni critiche più o meno direttamente connesse con questa disciplina.
Di particolare interesse per la presente discussione sembrano essere quelle, fra tali questioni, che, con un po' di buona volontà, si lasciano raggruppare sotto le denominazioni di *problemi ontologici* e, rispettivamente, di *problemi epistemologici*.

2. Per problemi *ontologici* vogliamo intendere quei problemi al centro dei quali si trova (in qualche modo) la *natura* di oggetti matematici. Sempre sorretti da un po' di buona volontà, tali problemi si lasciano suddividere in *speciali* e *generali*.
Esempi di *problemi ontologici speciali*: Che cos'è un numero naturale? intero? razionale? reale? complesso? che cos'è una funzione continua? che cos'è un'area? che cos'è un numero? che cos'è una funzione? che cos'è un in-

sieme?

Esempi di *problemi ontologici generali*: Che cos'è un ente matematico? Esistono più tipi di enti matematici? Esiste un tipo privilegiato di enti matematici?

3. Per problemi *epistemologici* vogliamo intendere quei problemi nei quali interviene, in qualche modo significativo, la *conoscenza* di oggetti matematici. Con la solita buona volontà anch'essi si lasciano suddividere in *speciali* e *generali*.

Esempi di *problemi epistemologici speciali*: che cos'è una dimostrazione? che cos'è una definizione? che cos'è una computazione?

Esempi di *problemi epistemologici generali*: il "problema della affidabilità" - donde proviene la certezza paradigmatica della conoscenza matematica?; il "problema delle applicazioni" - donde provengono la possibilità e l'efficacia dell'applicazione della matematica alla descrizione dei fenomeni?

4. Rispetto al complesso di questi problemi è possibile introdurre, nella loro storia nell'età moderna, una distinzione in due grandi fasi: (I) *fino a Gauss*; (II) *da Gauss in avanti* (la buona volontà deve continuare).

5. *La prima fase* è contraddistinta dal fatto che in essa i diversi tipi di problema da noi accennati vengono riguardati come sostanzialmente estranei alla matematica in quanto tale e di pertinenza invece di un'altra di-

sciplina: la *filosofia* (e delle sue varie articolazioni). Così, i "problemi generali" sono naturale terreno di indagine dell'ontologia e della teoria della conoscenza e i "problemi epistemologici speciali" vengono indagati dalla logica; anche i "problemi ontologici speciali" sono lasciati alla filosofia perchè il problema della *determinazione della natura degli enti matematici* è sentito come profondamente distinto da quello della *trattazione delle loro proprietà*. Da notare, peraltro, che questa attribuzione di competenza, non ha, in generale, in questa fase, alcuna connotazione negativa; non di rado sono gli stessi personaggi che svolgono sia quello che considerano il lavoro filosofico sia quello che considerano il lavoro matematico. Per esempio, Newton ci dà nella sua *Arithmetica Universalis* questa tipica "definizione filosofica" del concetto di numero: "Per numero intendiamo non tanto una moltitudine di unità, quanto piuttosto un rapporto astratto di una quantità qualsivoglia con un'altra dello stesso genere che è presa come unità. Ed è di tre tipi: intero, fratto, sordo. Intero quello che è misurato dall'unità; fratto quello che è misurato da un sottomultiplo dell'unità; sordo quello che è incommensurabile con l'unità". Altro esempio: C. Wolff, le cui conoscenze matematiche erano comunque tali da indurre Leibniz ad appoggiarne in maniera decisiva la chiamata a Halle quale professore di matematica, dedicò una parte rilevante della sua gigantesca *Philosophia prima sive ontologia* alla definizione di concetti quali: unità, numero; numero intero, fratto, irrazionale; grandezza, misura; numero finito e infinito; ordine, continuo, divisibilità etc. etc. etc.

6. La *seconda fase* è invece contrassegnata dal fatto che in essa prende corpo e si viene via via consolidando una radicale trasformazione metodica consistente nella *matematizzazione* di (parte di) questi problemi, ossia nell'incorporamento nella matematica (di parte) dei problemi precedentemente attribuiti alla filosofia. Con riferimento alle distinzioni introdotte e con l'impiego di una ancor maggiore dose di buona volontà, questa seconda fase si lascia a sua volta suddividere in *tre sotto-fasi fondamentali:* da Gauss a Frege; da Frege a Gödel; da Gödel in avanti.

7. Tratto caratteristico della *prima sotto-fase* è che in essa il processo di matematizzazione concerne essenzialmente problemi del tipo che abbiamo chiamato "ontologici speciali". Si rilegga la breve lista di problemi di questo genere contenuta nel § 2 e si pensi a nomi quali: Gauss, Cauchy, Bolzano, Hamilton, Weierstrass, Riemann, Dirichlet, Cantor, Dedekind, Heine, Hankel, Du Bois-Reymond, Lipschitz, Darboux, Schwarz, Frege, *et al.*

8. Tratto caratteristico della *sotto-fase successiva* è invece il fatto che, accanto agli sviluppi lungo le di-

rezioni emerse nella fase precedente, il processo di matematizzazione investe anche problemi di tipo generale, sia ontologici che epistemologici (a parte il fatto che, a quel livello di generalità, la distinzione rivela, più che altrove, la sua fragilità e precarietà). Il programma logicista di Frege, infatti, è nella sua sostanza, il primo grande tentativo di matematizzare compiutamente problemi quali quello della natura degli enti matematici e della affidabilità della matematica. Di Hilbert e del suo programma non occorre nemmeno parlare. Con un ulteriore sforzo di buona volontà si può anche interpretare l'intuizionismo brouweriano come un tentativo di matematizzare, sia pur in forma diversa, proprio i due grandi problemi affrontati da Frege. Merita rilevare che la pretesa di una sinonimia fra "ricerca sui fondamenti della matematica" e "ricerca di una fondazione (in senso forte) della matematica" può trovare elementi di conforto dalla considerazione di questo, ma solo di questo periodo.

9. I tratti distintivi del *dopo-Gödel* (e qui la buona volontà deve essere proprio tanta) sono costituiti, da un lato, dall'affievolirsi delle grandi ambizioni del cinquantennio precedente e, dall'altro, dal consolidamento e sviluppo dei processi di matematizzazione di problemi del tipo "epistemologici speciali" che non erano stati toccati da tali processi nella prima sotto-fa-

se ma che avevano invece cominciato ad esserne investiti nel quadro dei grandi programmi fondazionistici del periodo Frege-Gödel.

Una parte significativa di questi processi di matematizzazione si lascia riportare alla seguente forma:

(a) dare una precisazione matematica del contenuto di locuzioni della forma: "A è una procedura conoscitiva di tipo T per x" ($\mathrm{Proc}_{\mathrm{T}}$ (A,x)) (Esempi: "A è una dimostrazione per x"; "A è una definizione per x"; "A è una computazione per x");

(b) sviluppare una teoria matematica sulla base di (a).

E' interessante notare che molto spesso questa trattazione è passata attraverso due stadi. Nel primo stadio, lo sviluppo di (a) è stato spinto avanti per quel tanto che bastava a sviluppare una teoria matematica di $\exists$ A $\mathrm{Proc}_{\mathrm{T}}$ (A,x) (Es: dimostrabile, definibile, computabile); solo successivamente, esaurito in qualche modo il terreno problematico precedentemente aperto, si è ritornati su (a) per nuovi, ulteriori approfondimenti.

10. A conclusione una proposta terminologica. Riserviamo il termine "fondamentalistica" (o, sinonimicamente, "indagine sui fondamenti") a quel tipo di ricerche che si presentano come (tentativo di) *trattazione matematica di problemi scaturenti dalla riflessione critica sulla matematica*, come appartenenti, per così dire, alla intersezione di "matematica" e "filosofia della matematica" evitando accuratamente di usarlo come sinonimo del secondo membro dell'intersezione ed evitando altresì, non meno accuratamente, di usarlo come sinonimo di "ricerca di una fondazione (ultima) della matematica".

Tali distinzioni sono naturalmente assai precarie, ma, sforzandosi di rispettarle nei limiti del possibile, si riuscirà forse a evitare di discutere completamente a vuoto.