Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Intervento di Roberto Magari

Passano sotto il nome di « ricerca sui fondamenti della matematica » almeno tre tipi di ricerca.

1. - Le ricerche volte a conferire credibilità alle proposizioni matematiche o derivandole da opportune leggi o proposizioni (le « rocce eterne » di Frege) o conferendo comunque loro un qualche stato speciale. Si mira in genere alla « certezza » tentando di salvare uno dei motivi di fascino che colpisce il discente alle prese per la prima volta con la trattazione assiomatica.

2. - Le ricerche volte a stabilire una teoria cui ricondurre ogni teoria matematica anche indipendentemente da altri motivi che la privilegino.

3. - Le ricerche volte a stabilire concetti e nessi che siano altamente produttivi (si presenta qui, naturalmente, anche la difficoltà di stabilire di che tipo di cose questi concetti e nessi abbiano da essere produttivi).

I. Il primo tipo di ricerca interessa due tipi di studioso: coloro che ritengono sufficientemente probabile che le (o alcune) proposizioni matematiche parlino di opportuni oggetti oppure che nella ricerca convenga agire « come se » e coloro che hanno a che fare con proposizioni matematiche applicate (e si potrebbe dire, ma sarebbe poco più che una scappatoia, che essi fanno ricerca sui fondamenti di altre discipline). Non so da che cosa i primi potrebbero trarre certezze né ho mai capito quali siano i criteri con i quali essi privilegino, se lo fanno, i concetti che corrisponderebbero a oggetti reali da quelli che rimarrebbero fantasie.

Il secondo caso è più interessante; come dicevo niente vieta di scaricare il problema del successo della matematica per esempio in fisica ai fondamenti della fisica ma il problema resta: se si deve credere alla nostra memoria circa la fisica e le sue applicazioni viviamo in un mondo che ha, fra le sue caratteristiche più importanti, quella di essere almeno in parte descrivibile (almeno per il passato) con strumenti matematici. Si presentano qui due problemi almeno: che cosa si debba ritenere sul mondo per il fatto di essere in parte dominabile con quegli strumenti e come si spieghi che noi possediamo gli strumenti stessi.

Mi sembra che la teoria della selezione naturale possa tentare di rispondere alla seconda domanda: la prima, credo, è prematura: sappiamo ancora troppo poco sulla matematica, sul cervello animale e umano in parti-

Per il secondo punto rimando a quanto ho già proposto in altre occasioni.

Il terzo tipo di ricerche è assai arduo e viene a confondersi col lavoro quotidiano di ogni matematico o quasi. Non abbiamo (chiedo scusa a chi pensasse il contrario) un'idea chiara di che cosa noi stessi giudichiamo importante e produttivo in matematica, tanto meno l'abbiamo su come introdurre concetti e nessi opportuni. Qui si manifesta la « fantasia creativa » dei matematici e, senza beninteso fare di questa dote un feticcio mistico, occorre riconoscere che non ne sappiamo molto. A me non sembra che di fatto questa fantasia ecceda ciò che è fattibile da un'apparato combinatorio finito, ma c'è chi è di parere opposto e chi desidera che sia vero l'opposto. Al parere non c'è molto da replicare a parte il fatto ovvio che niente di non riducibile al finito è stato mostrato. Il desiderio nasce da un equivoco o almeno da un pregiudizio che si può non condividere, e cioè che una situazione chiaramente analizzabile non sia degna di apprezzamento.

Ho parlato di concetti e di « nessi ». Mentre un tempo sembrava ovvio che non fossero tanto importanti i concetti quanto i postulati che si sceglievano, una tendenza recente reagisce mettendo in rilievo l'importanza dei concetti (lascio agli storici di specificare meglio l'aggettivo « recente »). A volte mi sembra che questa reazione esageri ma è assai difficile decidere finchè la psicologia e la neurologia non saranno più avanzate. Quel poco che si può vedere per introspezione o con ricerche storiche accurate non è, che io sappia, decisivo. E' anche possibile che la questione si riveli sterile, come se uno domandasse se in una rete siano più importanti i nodi o le maglie. Dovendo esprimere una prima impressione direi che, mentre nella simulazione formale ovviamente tutto si riduce ad assiomi e regole, la comunicazione di un ambito vago da un individuo a un altro avviene, almeno all'inizio, più facilmente cercando di trasmettere (per sinonimie, per analogie, per ostensione etc.) un concetto che non proposizioni intorno ad esso.

Circa i concetti ci sono due convinzioni abbastanza diffuse che mi sembrano dubbie:

a) che un concetto nasca (o esista ab aeterno) già preciso e completo e soltanto una nostra difficoltà a « coglierlo » completamente oppure anche una sua inesauribilità ci impedisca di trovare le proposizioni del caso intorno ad esso. Così, per esempio, sarebbe un'insufficiente comprensione degli insiemi (concettuali o iperurani che siano) a non permetterci di decidere circa la scelta o il continuo;

b) che alcuni concetti importanti siano inesauribili non soltanto per il fatto che è difficile prevedere come l'attività umana li farà evolvere, ma anche come loro caratteristica attuale.

Ambedue queste congetture mi sembrano, per quel tanto che siano sensate, assai improbabili ma, a parte l'improbabilità generica di qualunque ipotesi troppo fantastica, ammetto di non avere argomenti contrari (né, naturalmente, a favore).

colare, sulla fisica stessa per tentare una risposta non tanto fantasiosa da essere altamente improbabile.

Su questi temi c'è da aggiungere un'osservazione che li lega: il mondo probabilmente è tale che è stato più semplice per la selezione naturale arrivare a un cervello che ne ha una profonda intelligenza che non ad un cervello ad hoc per un ambiente limitato.

II. Le ricerche relative a una teoria di base hanno avuto un discreto successo. Le varie teorie degli insiemi permettono effettivamente una profonda unificazione della matematica. Molti matematici ritengono oggi che, nel sovrapporre ad alcuni concetti vaghi del senso comune (matematico e non matematico) concetti definiti nell'ambito di una teoria degli insiemi, si sia perso talvolta qualcosa (così per esempio E. De Giorgi in varie comunicazioni orali), ma ciò è ancora da vedersi, sebbene una ricerca che parta da un tale presupposto temporaneo possa senz'altro essere utile.

Altri ritengono che la teoria delle categorie sia più idonea (in vista anche del terzo tipo di ricerche). Probabilmente ogni giudizio in proposito è per ora sospetto a causa dell'entusiasmo dei categoristi da un lato e del conservatorismo di chi non ha voglia di rivedere a fondo i propri strumenti dall'altro.

Poca o nessuna attenzione viene ormai dedicata ad altre possibili teorie di base, per quanto gli atteggiamenti di base siano molti. Per parte mia riterrei di grande interesse che si proseguissero i tentativi di matematica ricorsiva (per intendersi: prendere come teoria di base una teoria assiomatica degli insiemi ricorsivamente enumerabili) o meglio addirittura finita. In particolare ritengo che sarebbe importante verificare o smentire l'ipotesi che una matematica del finito opportuna sia sufficiente per tutte le applicazioni note. Per esempio, è sufficiente per la fisica nota l'uso scaltrito di equazioni alle differenze finite? Quale parte dell'Analisi classica può essere riprodotta usando l'anello degli interi (dove l'unità si consideri in un senso opportuno « piccola ») in luogo del campo reale? A simili domande sarebbe utile rispondere anche in vista del problema, dianzi ricordato, della fortuna della matematica nelle applicazioni: la fortuna, per esempio, del calcolo differenziale dipende dal fatto che esso rappresenta una comoda semplificazione (in certi casi) del calcolo alle differenze finite?

Quando si considera la matematica in vista delle sue applicazioni e in particolare dell'applicazione che più interessa i logici, ossia la metamatematica, la scelta della teoria di base (se si vuole che un teoria di base ci sia) non è indifferente: a me sembra probabile che sia opportuno prendere due precauzioni:

a) fare particolare attenzione alle conseguenze sul finito della teoria;

b) introdurre una distinzione, isolando all'interno delle proposizioni esprimibili nel linguaggio che si usa, un insieme di proposizioni « sensate ».

Per ignoranza non ho indicazioni da dare sul primo punto, mi auguro che qualcuno faccia il punto di quanto è stato fatto.