Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

METODI DI REALIZZABILITA' E FORCING NELLA METAMATEMATICA DEI SISTEMI FORMALI COSTRUTTIVI.

Ferdinanzo Arzarello. Dipt. Matematica. Univ. Torino

1. Dimostrerò il seguente

TEOREMA. $HA^{\omega} + AC + FAN + EXT$ è un'estensione conservativa di HA.

I sistemi HA^{ω} e HA sono descritti in Troelstra (1973);

AC (assioma di scelta; x, y di tipo qualsiasi):

$$\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists f \forall x A(x, f(x)).$$

FAN (principio del ventaglio = forma costruttiva del lemma di König):

$$\forall f \in {}^{2}N \exists m\, R(\overline{f}m) \,\&\, \forall n \forall m\, (n \leq m \,\&\, R(m) \rightarrow R(n)) \rightarrow \exists m \forall f \in {}^{2}N.\, R(\overline{f}m)$$

EXT (estensionabilità): $\forall x\, (fx = gx) \rightarrow f = g$.

Il risultato vale anche, con la stessa dimostrazione, per altri sistemi costruttivi, ad es. le varianti dei sistemi *BEM* di Feferman (1978) per le quali si riescano a definire la realizzabilità estensionale (cfr. oltre) e il forcing uniforme. In un lavoro in preparazione tratto dal problema per i sistemi di Martin-Löf.

Il teorema dimostrato unifica due tipi di risultati, ottenuti con tecniche diverse tra di loro. Da un lato, infatti , Kreisel e Troelstra (1970) ottengono la conservatività di $EL + FAN$ su HA come conseguenza del cosiddetto "teorema di eliminazione"; il loro metodo, però, è talmente centrato sull'analisi delle successioni di scelta da non essere estendibile ad altri sistemi costruttivi. D'altra parte, la conservatività di $T = HA^{\omega} + EXT + AC$ su HA è già nota da tempo; io conosco almeno tre diverse dimostrazioni (dovute a Goodman, Minc, Beeson). Beeson in Beeson (1980) usa metodi di realizzabilità e forcing: è appunto questa tecnica che qui viene utilizzata per dimostrare il Teorema.

Il sistema T può lasciare insoffisfatto il costruttivista canonico per l'assioma EXT; Myhill (1975) ha espresso perplessità di vario genere (in T si negano, dimostrabilmente, la tesi di Church, e la continuità di tipo ((N, N), N))). L'apparire dei sistemi di Martin-Löf, però, i quali sembrano ben fondati costruttivamente e dove T è interpretabile hanno ridimensionato la portata di tali critiche.

2. *Tecniche usate nella dimostrazione.* Come già detto, la dimostrazione fa uso di due tecniche, realizzabilità e forcing, che *devono* essere combinate insieme per ottenere il Teorema. Rimando a Beeson (1980) e al suo preannunciato libro (1983?) per i dettagli su tali tecniche.

Forcing uniforme (versione sintattica): l'idea è di allargare il modello inteso di HA^{ω} con una funzione parziale 'generica'

$a: N \rightarrow 2$ e di esprimere ciò in una teoria HAa^{ω} ottenuta da HA^{ω} con l'aggiunta di una variabile a per la funzione generica. E' possibile interpretare i termini di HAa^{ω} in HA^{ω} e viceversa. Si può allora definire in HAa^{ω} sintatticamente una classe di formule del tipo $x\underline{f}F$ (F f.la di HA^{ω}; leggasi 'x forza F') come in Cohen, con l'eccezione dei connettivi $\rightarrow, \forall$, per i quali scattano clausole di uniformità. Ad esempio, $p\underline{f}\ (A \rightarrow B)$ è definito come:

$\forall q \leq p\ (q\underline{f}A) \rightarrow \exists n q \underline{f}_n B)$; la clausola per le f.le atomiche è $p\underline{f}\ (t = s)$ sse $\forall g \leq p\ (\overline{t}g = \overline{s}g)$, ($q \leq p$ significa q estende p; $p\underline{f}_{,} F$ significa:

$\forall q \leq p\ (lth\ (q) - lth\ (p) = n \rightarrow q\underline{f}F)$, con $lth\ (p)$ = lunghezza di p; $\overline{t}g$ = il termine che corrisponde in HAa^{ω} al termine t di HA^{ω}).

E' noioso ma semplice dimostrare le seguenti proprietà:

PROPRIETA' 1. $HAa^{\omega} \vdash A \Rightarrow HA^{\omega} \vdash \forall p \exists q \leq p\ (q\underline{f}A)$.

PROPRIETA' 2. Se A è aritmetico: $HA^{\omega} \vdash (p\underline{f}a) \leftrightarrow A$.

Realizzabilità. Userò una variante della cosiddetta HRO-realizzabilità (cfr. Troelstra 1974). Data una formula A di HA^{ω}, la traduciamo in una formula A^* di HAa come nella HRO – realizzabilità: ad es. $(\forall f A(f))^* = \forall x\ (\forall u \exists v T^{a}\ (x, u, v) \rightarrow A\ (\{x\}^{a}))$. La definizione di ($r$–, q–) realizzabilità é data al solito modo, usando funzioni ricorsive in a. Tale definizione è sufficiente per realizzare AC e FAN, ma non va bene per *EXT*. Per realizzare *EXT* di solito si usa la *HEO*-realizzabilità modificata, ma questa non è adatta per realizzare *FAN*. Si esce dal dilemma ricorrendo alla realizzabilità estensionale di Kleene (che realizza *AC*, *EXT* e *FAN*); essa, per le formule come $A \to B$, opera estensionalmente sui realizzatori di A (come la *HEO*-real.), ma fa uso di funzioni parziali (come la *HRO* - real.). La definizione è come segue: per ogni formula F^*, definiamo due formule $e\underline{r}F^*$, $(x, y)\ \underline{r}F^*$; la prima è definita come al solito, ma per F^* atomico si pone $e\underline{r}F^*$ *sse* $e = 0 \& F^*$; la seconda (che può essere letta '$x = y$ come realizzatori di F^*') è così definita (elenco solo alcune clausole): $(x, y)\ \underline{r}F^*$ *sse* $x = y = 0 \& F^*$; $(x, y)\ \underline{r}\ (A \to B)$ *sse* $x\underline{r}\ (A \to B)\ \& y\underline{r}\ (A \to B)\ \& \forall u\ (u\underline{r}A \to (\{x\}^a\ (u), \{y\}^a\ (u))\ \underline{r}B)$; $(x, y)\ \underline{r}\exists z A\ (z)$ *sse* $(x)_1 = (y)_1 \& ((y)_1 \& ((x)_2, (y)_2)\ \underline{r}A\ ((x)_1)$; ecc.