Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

INFERENZE INDUTTIVE FINITARIE

DOMENICO COSTANTINI

E' ben noto che le inferenze possono essere raggruppate in due grandi classi: le dimostrative (deduttive o matematiche) e le non dimostrative. Queste, a loro volta, possono essere suddivise in abduttive e induttive. Le prime sono volte alla falsificazione delle ipotesi o, nel caso ció non si verifichi, alla loro corroborazione; le seconde alla determinazione delle probabilitá delle ipotesi. La logica induttiva si occupa dello studio di quest'ultimo tipo di inferenze, studio che sostanzialmente consiste nello stimare il valore di una grandezza sconosciuta. La stima, cioé la determinazione di una distribuzione di probabilitá sui possibili valori della grandezza, puó essere compiuta supponendo di conoscere la legge che determina il comportamento della popolazione da cui sono tratte le osservazioni disponibili, oppure non facendo questa supposizione. Per semplicitá, ci limiteremo a questo caso.

Se ci muoviamo in questo contesto, allora la stima é relativa al parametro di una legge e puó essere compiuta facendo uso del teorema di Bayes

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{\Theta} p(\theta)p(x|\theta)d\theta}, \quad \theta \in \Theta$$

in cui θ é il parametro che si intende stimare, x descrive l'insieme delle osservazioni, $p(\theta|x)$, $p(\theta)$ e $p(x|\theta)$ sono rispettivamente le distribuzioni finale, iniziale e la verosimiglianza.

Per determinare la distribuzione finale bisogna naturalmente conoscere tanto la distribuzione iniziale quanto la verosimiglianza. La prima assomma tutte le conoscenze disponibili prima di effettuare le osservazioni; la seconda é determinata dalla legge che governa il comportamento della popolazione.

Contro questo modo di condurre la stima é stata avanzata una critica di tipo finitista: la stima cosí compiuta non é controllabile. Affinché ció avvenga, la stima deve concludersi con una distribuzione sui possibili risultati di un esperimento futuro. Ad esempio, e relativamente alla stima di una probabilitá, il parametro su cui distribuire la probabilitá finale non dovrá essere l'intervallo $[0,1]$ bensí l'insieme $\{0/m, 1/m, \ldots, m/m\}$ che descrive le frequenze relative con cui un certo evento si puó verificare in m futuri esperimenti. La soluzione tecnica mediante la quale si

perviene ad una distribuzione predittiva é la marginalizzazione

$$p(y|x) = \int_{\Theta} p(y|\theta)p(\theta|x)d\theta$$

in cui y é un generico risultato futuro.

Ma, ci possiamo chiedere, sono davvero finitarie le inferenze predittive? La risposta é negativa dal momento che, pur arrivando ad una distribuzione finitaria, una simile inferenza prende le mosse da una distribuzione, $p(\theta)$, che finitaria non é. Si potrá dire di aver compiuto un'inferenza finitaria quando non solo le conclusioni siano finitaria ma **tali siano anche le** premesse.

Un modo banale per risolvere il problema esiste; per semplicitá lo illustreremo limitatamente al caso binomiale, quando cioé si tratta con due soli attributi, 0 ed 1. Supponiamo di aver eseguito n esperimenti descritti da $x = 0_1 \cap 0_2 \cap \ldots \cap 1_n$ e di voler determinare le probabilitá relative ad m esperimenti futuri descritti da $y = 1_{n+1} \cap 0_{n+2} \cap \ldots \cap 1_{n+m}$. Tutti i possibili risultati di n+m esperimenti saranno descritti dalle sequenze: $s_1 = 0_1 \cap 0_2 \cap \ldots \cap 0_{n+m}$, $s_2 = 1_1 \cap 0_2 \cap \ldots \cap 0_{n+m}$, $s_3 = 0_1 \cap 1_2 \cap \ldots \cap 0_{n+m}, \ldots$, $s_{2^{n+m}} = 1_1 \cap 1_2 \cap \ldots \cap 1_{n+m}$. Se si assegnano alle sequenze valori tali che

$$p(s_i) \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,2^{n+m},\quad \sum_i p(s_i) = 1,$$

si potrá risolvere il problema tenendo conto che

$$p(y|x) = \frac{p(x \cap y)}{p(x)}$$

cioé sommando tutti i valori attribuiti alle sequenze compatibili con y dopo che i valori di tutte le sequenze siano stati rivalutati a seguito dell'annullamento dei valori delle sequenze incompatibili con x.

Questo procedimento diventa tuttavia impraticabile non appena n+m é un poco elevato. Il problema potrá dirsi risolto invece se sará possibile determinare le $p(s_i)$ utilizzando poche e semplici condizioni.

Per certe inferenze induttive ció é possibile, ad esempio, per quelle che prendono le mosse da una distribuzione iniziale di Dirichlet; per altre tuttavia ció non sembra possibile. Questo sembra suggerire una netta distinzione fra le inferenze induttive: da una parte quelle che possono essere ricostruite in termini finitari; dall'altra quelle per le quali ció non é possibile. Questa distinzione, se da un lato ci assicura dell'esistenza di inferenze concretamente controllabili, dall'altro, sembra suggerire la necessitá, a meno di voler cancellare una classe troppo ampia di inferenze induttive, dell'uso di nozioni non finitarie.