Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

MODELLI CON COPERTURE PER LA LOGICA PROPOSIZIONALE INTUIZIONISTA E LOCALE

S. GHILARDI - G. C. MELONI

Il concetto assiomatico di copertura è emerso nella geometria algebrica di Grothendieck e successivamente Lawvere ne ha proposto una versione logico-algebrica in termini di un operatore modale intuizionista. Qui se ne studia il caso proposizionale, con particolare riguardo al problema della completezza in una metateoria intuizionista, rispetto ad una semantica che utilizza preordini muniti di una doppia relazione di copertura; tale semantica permetterà non solo di esibire dimostrazioni valide nei topoi, ma altresì di ampliare i risultati già ottenuti, in una metateoria classica con assioma della scelta, rispetto agli universi di Kripke con una copertura. (Bozzi-Meloni, boll. U.M.I. (5) 17-A (1980); 436-442).

Se $\langle Z, \leq \rangle$ è un preordine, diciamo <u>crivello</u> un sottoinsieme C di Z tale che $\alpha \in C$ e $\beta \leq \alpha$ implicano $\beta \in C$; indichiamo con v_α il crivello $\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ e scriviamo $C\,cr\,\alpha$ per intendere che C è un crivello contenuto in v_α. Una <u>topologia di Grothendieck</u> o <u>copertura</u> è una relazione cp tra sottoinsiemi di Z ed elementi (zone) di Z, tale che:

$$C\,cp\,\alpha \Rightarrow C\,cr\,\alpha, \qquad C\,cp\,\alpha \text{ e } \beta \leq \alpha \Rightarrow C \cap v_\beta\,cp\,\beta, \qquad v_\alpha\,cp\,\alpha,$$

$$(C\,cp\,\alpha \text{ e } C'\,cr\,\alpha \text{ e } \forall \beta \in C \quad C' \cap v_\beta\,cp\,\beta) \Rightarrow C'\,cp\,\alpha .$$

Le coperture corrispondono biunivocamente agli operatori *locali* di Lawvere ossia alle funzioni $\ell:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ (dove $\mathscr{C}$ è l'algebra di Heyting completa dei crivelli di $\langle Z,\sqsubseteq\rangle$) che soddisfano le condizioni seguenti:

$c\subseteq \ell c$, $\quad \ell\ell c\subseteq \ell c$, $\quad \ell(c_1\cap c_2)=\ell c_1\cap \ell c_2$.

I crivelli tali che $\ell c\subseteq c$ (ossia tali che $C\cap v_\alpha\, cp\, \alpha \Rightarrow \alpha\in C$)sono detti *chiusi*, e il loro insieme, che indicheremo con $\mathscr{C}^\sim$, è un'algebra di Heyting completa in cui gli estremi superiori si ottengono applicando ℓ alla riunione. Si ha inoltre che gli operatori locali $\ell^*: \mathscr{C}^\sim \longrightarrow \mathscr{C}^\sim$ corrispondono biunivocamente alle coperture che estendono cp.

Dal punto di vista sintattico definiamo *una teoria proposizionale intuizionista con operatore locale* come un'*algebra di Lawvere* L, ossia come un'algebra di Heyting munita di un operatore locale.

Diciamo *universo* di interpretazione per L una quadrupla $\langle Z,\sqsubseteq, cp_\vee, cp_\ell\rangle$, dove $cp_\vee$ e cp_ℓ sono coperture tali che $cp_\vee\subseteq cp_\ell$. Indichiamo allora con $\mathcal{U}$ l'algebra di Heyting completa dei crivelli chiusi di $\langle Z,\sqsubseteq, cp_\vee\rangle$ munita dell'operatore locale corrispondente a cp_ℓ. Chiamiamo quindi *modello* di L in $\mathcal{U}$ un morfismo $L\longrightarrow\mathcal{U}$ ossia, equivalentemente, una relazione di validità $\models$ tra zone e concetti (elementi di L) tale che:

V) $(x\vdash y$ e $\models_\alpha x)\Rightarrow \models_\alpha y$

U) $(\models_\alpha x$ e $\beta\sqsubseteq\alpha)\Rightarrow\models_\beta x$

L) $\{\beta\sqsubseteq\alpha \mid \models_\beta x\}\, cp_\vee\, \alpha \Rightarrow \models_\alpha x$

1) $\models_\alpha x\wedge y \Leftrightarrow \models_\alpha x$ e $\models_\alpha y$

2) $\models_\alpha x\vee y \Leftrightarrow \{\beta\sqsubseteq\alpha \mid \models_\beta x$ o $\models_\beta y\}\, cp_\vee\,\alpha$

3) $\models_\alpha f \Leftrightarrow \emptyset\, cp_\vee\,\alpha$

4) $\models_\alpha x\to y \Leftrightarrow \forall\beta\sqsubseteq\alpha(\models_\beta x\Rightarrow\models_\beta y)$

5) $\models_\alpha \ell x \Leftrightarrow \{\beta\sqsubseteq\alpha\mid\models_\beta x\}\, cp_\ell\,\alpha$

Si noti che, come caso particolare, se $cp_\vee$ è la copertura definita da: $C\, cp\, \alpha \Leftrightarrow C=v_\alpha$, i modelli sopra definiti coincidono con quelli considerati in Bozzi-Meloni(cit.); diremo *kripkiani* tali modelli.

Il teorema di completezza, nella forma forte del modello generico, può essere così espresso:

"Esiste un modello $\mathfrak{M}=\langle Z,\sqsubseteq, cp_\vee, cp_\ell,\models\rangle$ tale che, per ogni $x\in L$, se per ogni $\alpha\in Z$, $\models_\alpha x$, allora x è dimostrabile in L".

Agli effetti della dimostrazione del teorema, ogni modello è equivalente ad un modello *interno*, ossia ad un modello costruito su un preordine di *filtri* di L (ordinati da $\supseteq$). Studieremo perciò le coperture $cp_\vee$ e cp_ℓ che rendono $\langle \mathcal{F}(L),\supseteq, cp_\vee, cp_\ell,\ni\rangle$ modello generico di L (dove $\mathcal{F}(L)$ è l'insieme dei filtri di L); chiameremo *$\vee$-adeguate* le coperture $cp_\vee$ per cui la quintupla data soddisfa le condizioni da V) a 4) e *ℓ-adeguate* (rispetto a una copertura $cp_\vee$ $\vee$-adeguata) le coperture cp_ℓ tali che $cp_\vee\subseteq cp_\ell$ e tali che 5) è soddisfatta. In una metateoria intuizionista si dimostra quindi il seguente:

TEOREMA. Sono $\vee$-adeguate tutte e sole le coperture $cp_\vee$

tali che $cp_{\vee m} \subseteq cp_\vee \subseteq cp_{\vee M}$, dove $cp_{\vee m}$ e $cp_{\vee M}$ sono, rispettivamente, le coperture così definite:

$Ccp_{\vee m}F \Leftrightarrow CcrF$ ed esistono $x_1,\dots,x_n$ $(n \geq 0)$ tali che $[F,x_1] \cap \dots \cap [F,x_n] = F$ e $[F,x_i] \in C$ per ogni $i=1,\dots,n$ ($[F,x_i]$ è il filtro generato da F e da x_i);

$Ccp_{\vee M}F \Leftrightarrow CcrF$ e per ogni $F' \supseteq F$ $\bigcap_{G \in C \cap \vee_{F'}} G \subseteq F'$.

Inoltre $cp_{\vee m}$ e $cp_{\vee M}$ risultano esse stesse $\vee$-adeguate.

Per i modelli kripkiani abbiamo il seguente risultato:

TEOREMA. Se si definisce:

"$Ccp_{\vee i}F \Leftrightarrow CcrF$ e per ogni ideale I tale che $\forall G \in C$ $G \sqsubseteq I$, si ha che $F \sqsubseteq I$ (dove $F \sqsubseteq I$ sta per "esiste un $x \in F \cap I$")"

risulta allora che $cp_{\vee i}$ è $\vee$-adeguata anche in una metateoria puramente intuizionista. In una metateoria classica con assioma della scelta, si ha inoltre che $cp_{\vee i}$ induce un modello isomorfo al modello canonico di Kripke dei filtri primi. Pertanto le coperture ℓ-adeguate del modello canonico kripkiano corrispondono biunivocamente a quelle ℓ-adeguate rispetto a $cp_{\vee i}$.

Continuando in una metateoria intuizionista, ricaviamo il seguente:

TEOREMA. Si fissi una copertura $cp_\vee$ $\vee$-adeguata; le coperture cp_ℓ ℓ-adeguate rispetto ad essa sono tutte e sole quelle tali che:

1) $cp_\vee \vee cp_{\ell m} \subseteq cp_\ell$ (dove $cp_\vee \vee cp_{\ell m}$ indica la minima co-

pertura che contiene entrambe);

2) $cp_\ell \subseteq cp_{\ell M}$

($cp_{\ell m}$ e $cp_{\ell M}$ sono le coperture così definite:

$Ccp_{\ell m}F \Leftrightarrow CcrF$ ed esiste un x tale che $\ell x \in F$ e $[F,x] \in C$;

$Ccp_{\ell M}F \Leftrightarrow CcrF$ e per ogni filtro stabile $S \supseteq F$ (ossia per ogni filtro tale che $\ell x \in S \Rightarrow x \in S$) $\bigcap_{G \in C \cap \vee_S} G \subseteq S$).

Si noti ora che $cp_{\ell m} \subseteq cp_{\ell M}$ e che $cp_\vee \subseteq cp_{\ell M}$ (per ogni $cp_\vee$ $\vee$-adeguata); infine si osservi la copertura $cp_{\ell st}$ così definita: "$Ccp_{\ell st}F \Leftrightarrow CcrF$ e per ogni filtro stabile $S \supseteq F, S \in C$." Tale copertura (che è un adattamento al nostro contesto di un'idea di L. Anzani) è intermedia fra $cp_{\ell m}$ e $cp_{\ell M}$; si ottiene quindi il seguente specchietto riassuntivo di coperture ℓ-adeguate:

$$\begin{array}{ccccc}
cp_{\vee M} \vee cp_{\ell m} & \subseteq & cp_{\vee M} \vee cp_{\ell st} & \subseteq & cp_{\ell M} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \\
cp_{\vee i} \vee cp_{\ell m} & \subseteq & cp_{\vee i} \vee cp_{\ell st} & & \\
\hline
\not\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \not\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \\
cp_{\vee m} \vee cp_{\ell m} & \subseteq & cp_{\vee m} \vee cp_{\ell st} & &
\end{array}$$

Ciascuna delle coperture indicate è ℓ-adeguata rispetto alle coperture $\vee$-adeguate contenute in essa (ad esempio sono ℓ-adeguate per il modello canonico di Kripke le coperture che compaiono al di sopra della linea tratteggiata); tutte le inclusioni sono proprie (ad eccezione eventualmente di quella fra $cp_{\vee M} \vee cp_{\ell st}$ e $cp_{\ell M}$), come è possibile mostrare mediante opportuni controesempi.

E' infine possibile caratterizzare alcune coperture in modo più diretto e dar conto dei rapporti fra queste costruzioni e le definizioni relazionali utilizzate usualmente in logica modale.