Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ENRICO MARTINO

Sul concetto brouweriano di continuità negativa

In un celebre articolo del 1927 [1], accanto alle solite definizioni di continuità e di continuità uniforme, Brouwer introduce la definizione di continuità negativa. Questa può essere formulata nel seguente modo.

Sia f una funzione reale che supponiamo definita in tutto l'intervallo chiuso $[0, 1]$. Un punto $x (\in [0,1])$ è un <u>punto di discontinuità positiva</u> per f se esistono un numero razionale positivo ε ed una sequenza $\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \to x$ di punti di $[0,1]$ tali che $|f(x)-f(x_n)| > \varepsilon$ per ogni $n \in \omega$. f si dice <u>negativamente continua</u> se non ha punti di discontinuità positiva.

Alla fine del § 1 Brouwer prova il teorema di continuità negativa:

1. Ogni funzione reale è negativamente continua.

Nel §3 del medesimo articolo, Brouwer prova un teorema molto più forte, il famoso teorema di continuità uniforme:

2. Ogni funzione reale è uniformemente continua.

Da questo segue ovviamente che

3. Ogni funzione reale è continua.

Naturalmente il teorema 1 può essere visto, a sua volta, come banale corollario di 3. Tuttavia, la prova diretta di 1 sembra avere un particolare interesse fondazionale: essa mirerebbe a ricondurre l'asser to a principi più elementari di quelli su cui poggiano i teoremi 2 e 3. Brouwer afferma esplicitamente che il teorema 1 è "conseguenza immediata del punto di vista intuizionista". Non così il teorema 2. Brouwer dichiara d'aver stabilito il teorema 1 fin dal 1918, e che esso gli suggerì la congettura del teorema 2, del quale però riuscì a trovare una prova solo molto tempo dopo.

La prova di Brouwer del teorema 1 non è stata, a nostro avviso, ben compresa, probabilmente per l'esposizione piuttosto concisa e informale. Diversi autori hanno recentemente tentato di ricostruire l'argomento [2] , [3] , [4] . Ci sembrà però che tali ricostruzioni, pur per certi versi interessanti, manchino di mettere in luce una maggiore evidenza del teorema 1 rispetto al teorema 3 e di render quindi ragione del significato fondazionale del concetto di continuità negativa. E' appunto questo l'aspetto che ci proponiamo di analizzare.

I principi cruciali su cui si fonda la dimostrazione del teorema 2 sono l'alquanto controverso teorema del ventaglio ed un principio di continuità per le sequenze a scelta. Diamo una formulazione di quest'ultimo.

Siano $\alpha, \beta, \dots$ variabili per sequenze a scelta. Indicheremo con $\bar{\alpha}n$ il segmento iniziale di α di lunghezza n: $\bar{\alpha}n = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$.

Sia $\varphi : {}^{\omega}\omega \to \omega$ una funzione dall'insieme ${}^{\omega}\omega$ delle

sequenze a scelta all'insieme ω dei numeri naturali. Supporremo φ estensionale, cioé tale che $\alpha = \beta \to \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ dove "=" indica l'eguaglianza estensionale: $\alpha = \beta \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall n(\alpha(n) = \beta(n))$. Il principio di continuità in questione è

PC: $\forall \alpha \exists n \forall \beta (\bar{\alpha}n = \bar{\beta}n \to \varphi(\alpha) = \varphi(\beta))$.

PC afferma che il calcolo di $\varphi(\alpha)$ può sfruttare soltanto un segmento iniziale di α. Come osservato da Veldman, il teor.3 può essere derivato dal solo PC (senza l'uso del teor. del ventaglio). Pertanto esso è certamente più elementare del teor.2. Veldman, per altro, fornendo una ricostruzione della prova del teor. 1 fondata anch'essa su PC, pone i teoremi 1 e 3 sullo stesso piano di evidenza.

La prova di Brouwer del teor.1 sfrutta, a nostro avviso, in modo essenzaile, se pur implicito, l'idea della suddivisione del tempo in stadi discreti di conoscenza, propria della teoria del soggetto creativo. Proponiamo qui una nostra rielaborazione dell'argomento che, sfruttando esplicitamente tale idea, riduce il teor.1 ad un principio di indeterminatezza delle sequenze anomiche, di evidenza ben più immediata, a parer nostro, di PC. Allo scopo, riformuliamo il concetto di continuità negativa per le funzioni $\varphi : {}^{\omega}\omega \to \omega$ estensionali da sequenze a scelta a numeri naturali.

α è <u>punto di discontinuità positiva</u> per φ se esiste una sequenza $\langle \beta_n \rangle_{n \in \omega}$ di sequenze a scelta tale che

i) $\forall n \, \bar{\beta}_n(n) = \bar{\alpha}n$, ii) $\forall n \; \varphi(\beta_n) \neq \varphi(\alpha)$.

φ è <u>negativamente continua</u> se non ha punti di discon tinuità positiva. Proveremo il seguente principio PCN di continuità negativa da cui il teor.1 è derivabile come il teor.3 è derivabile da PC:

PCN : Ogni funzione φ come sopra è negativamente continua.

Sia dunque, per assurdo, α un punto di discontinuità positiva per φ e sia $\langle\beta_n\rangle$ come sopra. Dividiamo il tempo in stadi di conoscenza rappresentati dai numeri naturali. Se A è una proposizione, $\vdash_n A$ significa che, allo stadio n, si dispone di una prova di A. Assumiamo come stadio 0 uno stadio in cui si abbia una prova della discontinuità positiva di α e quindi di i) e ii). Introduciamo poi una sequenza anomica ϱ il cui valore $\varrho(n)$ sia scelto allo stadio n+1. ϱ è caratterizzata dal fatto che, per ogni $m \geq n$, $\varrho(m)$ è, allo stadion, ancora completamente indeterminato. Tale indeterminatezza può essere espressa mediante il seguente principio

PI $\quad \forall n \forall a (\bar{a}n = \bar{\varrho}n \longrightarrow \neg \vdash_n \exists m\ \varrho(m) \neq a(m)$

dove a varia sulle sequenze a legge.

PI è immediatamente giustificato dalla costruzione di ϱ : poiché, allo stadio n, solo i primi n valori di ϱ sono stati scelti e tutte le possibilità sono aperte per le scelte future, non è possibile, a quello stadio, provare che qualche valore futuro di ϱ sarà diverso dal corrispondente di a.

Definiamo ora la sequenza γ ponendo

$$\gamma(n) = \begin{cases} \alpha(n) & \text{se } p_n \text{ è pari} \\ \beta_{p_n}(n) & \text{se } p_n \text{ è dispari} \end{cases} \quad \text{dove} \quad p_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \{m \leq n \mid \varrho(m) = 0\} = \emptyset \\ \mu\{m \leq n \mid \varrho(m) = 0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia q uno stadio in cui $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\gamma)$ siano calcolabili. Si avrà allora $\vdash_q \varphi(\alpha) = \varphi(\gamma)$ o $\vdash_q \varphi(\alpha) \neq \varphi(\gamma)$. Nel primo caso $\vdash_q \neg\exists n(p_n$ è dispari). Segue allora da PI che il minimo zero di ϱ minore di q esiste ed è pari. Analogamente, nel secondo caso si conclude che il minimo zero di ϱ minore di q esiste ed è dispari. Pertanto, poiché $\vdash_0 (\varphi(\alpha) = \varphi(\gamma) \vee \varphi(\alpha) \neq \varphi(\gamma))$ si può concludere, allo stadio 0, che ϱ ha almeno uno zero: $\vdash_0 \exists n\ \varrho n = 0$ contro PI (si prenda per a una sequenza a legge priva di zeri).

Osserviamo che mentre PI è immediatamente giustificato dal modo stesso come le sequenze anomiche sono concepite, PC non sembra direttamente giustificato dalla concezione di sequenza a scelta. Osserviamo infatti che la conoscenza, ad un certo stadio, di una sequenza a scelta α non si riduce mai alla sola conoscenza di un suo tratto iniziale. Per quanto α possa essere indeterminata estensionalmente, èssa è pur sempre perfettamente determinata intensionalmente, è cioé dotata di una propria individualità in virtù della quale è un'entità ben precisa, distinguibile da ogni altra sequenza con cui pur abbia in comune tutti i valori noti. Oltre all'individualità possono poi essere note, ad un certo stadio, eventuali restrizioni sulle future scelte dei valori. Ora, sebbene l'esigenza di estensionalità di φ certamente limiti la possibilità di riferimento, nel calcolo di $\varphi(\alpha)$, all'indi vidualità ed alle eventuali restrizioni di α, non ci pare evidente che essa sia sufficiente a negarla. Osserviamo che la difficoltà relativa all'individualità sussiste anche per PC ristretto all'universo delle sole sequenze anomiche. Per queste, anzi, la difficoltà è aggravata dal fatto che, coincidendo l'uguaglianza estensionale con quella intensionale, l'estensionalità di φ non pone alcuna limitazione. La prova di PCN mostra come il fenomeno della continuità non dipenda semplicemente dall'indeterminatezza delle sequenze a scelta, ma piuttosto dalla coesistenza di sequenze indeterminate quali la ϱ e di sequenze vincolate quali la γ.

Crediamo dunque di poter concludere che PCN è più evidente di PC. Esso è conseguenza immediata della concezione intuizionista dell'universo delle sequenze a scelta. Gli aspetti di tale concezione più rilevanti per la determinazione di PCN sono i seguenti: a) la costruzione dell'universo procede nel tempo; b) ad ogni stadio è possibile concepire sequenze completamente libere; c) ad ogni stadio è possibile concepire sequenze vincolate a sequenze precedentemente introdotte.

Bibliografia

[1] Brouwer, L.E.J., *Ueber Definitionsbereiche von Funktionen*, Math. Ann. 97, 1927, pp.60-75.

[2] Posy, C.J., *Varieties and indeterminacy in the theory of general choice sequences*, J. Phil. Log. 5, 1976, pp.91-132.

[3] Troelstra, A.S., *On the origin and developements of Brouwer's concept of choice sequence*, The L. E.J.Brouwer Cent. Symp., North-Holland 1982, pp.

[4] Veldman, W., *On the continuity of functions in intuitionistic real analysis*, Report 8216, Math. Inst. Kath. Univers. Nijmegen, 1982.