Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ALLE RADICI DELLA LOGICA

Giovanni Sambin (Siena)

Per cominciare, qualche parola sul titolo e il tono di questa nota. Cercherò di esporre, in forma poco tradizionale, alcune osservazioni molto generali sulla natura del problema dei fondamenti, proponendo un'analisi non solo filosofica della genesi, nel soggetto o nella tradizione culturale, dei principi della logica e della matematica. Cioè un ritorno e un ripensamento alle radici.

Il tono non può essere che quello di un logico-matematico che si interroga sul senso del suo mestiere. Per risparmiare spazio, ometterò ogni dubbio, precisazione e confronto, consapevole tuttavia che questo comporta il rischio d'essere frainteso.

Questa premessa, che potrebbe continuare a lungo, mi sembra necessaria, e comunque esemplificativa della difficoltà principale cha a mio avviso incontra ogni tentativo di fondazione della logica o della matematica (da questo punto di vista, fa lo stesso): cercando un fondamento, ossia un inizio o base, su cui poggiare tutto il resto, o si cade nell'autoriferimento (in questo caso, lo scritto che spiega se stesso) o si assume qualcosa dal di fuori (in questo caso, la comprensione del lettore). O, come più spesso accade, entrambe le cose. Niente di male, ma questo ci dice che un fondamento in senso stretto, interno, semplicemente non è possibile. E mi sembra che, se non dal punto di vista storico, ci sia poco da aggiungere.

Non solo una forma di autoriferimento è necessaria per un fondamento, ma anzi esso fa parte tanto integrante di ogni inizio che sem-

bra necessario per la comunicazione stessa. "Mi presento, io sono Giovanni", come ogni uso della parola io, è un esempio. Ma esempi più divertenti si trovano sui muri ("Non so cosa scrivere"), nei dialoghi ("Tu cosa dici?", "Ah, io non dico niente." oppure "Credimi, ti dico la verità." oppure "Sarò onesto, vi ho mentito." etc.), nelle norme ("Non nominare il nome di Dio invano."), etc. Cioè l'autoriferimento c'è in natura ed è significativo, non paradossale, se inserito in un contesto. Il paradosso nasce o isolando il testo dal contesto o quando il contesto stesso manca, come nei giochi di parole (e gli esempi artificiali di autoriferimento stanno in questa categoria). Così, se vogliamo una qualsiasi filosofia della matematica o della logica che non separi l'oggetto (testo) dal soggetto (contesto), dobbiamo accettare l'autoriferimento non come peso, ma come salutare necessità. (Si noti che alle stesse conclusioni si può arrivare anche seguendo strade meno letterarie. Semplicemente analizzando le possibili definizioni del concetto di numero naturale, ad esempio, si scopre che i numeri naturali stessi sono già assunti, magari in una forma più riposta e debole. Ad esempio, nelle regole

$$0 \in N, \quad \frac{x \in N}{x' \in N}$$

è implicito il concetto di iterazione illimitata.)

Se Hilbert (e qui, e d'ora in poi, con Hilbert, Cantor, Brouwer etc. intendo non solo il personaggio storico, ma anche il personaggio di una ipotetica commedia sulla filosofia della matematica) avesse fatto sue simili osservazioni, forse non sarebbe rimasto così colpito dai teoremi di Gödel. Ma Hilbert semplicemente non poteva lasciarsi andare a tali riflessioni, perchè il suo scopo dichiarato

è un altro: bandire ogni forma di conflitto. Ossia, per esteso, vivere nel Paradiso che Cantor ha creato per lui, postulare di saper risolvere ogni problema matematico, licenziare l'allievo che si sposa senza il suo permesso e infine programmare di dimostrare che tutto ciò è legittimo. E il problema dei fondamenti è così per Hilbert risolto con un gioco di specchi: all'interno dell'attività matematica che vuole fondare, costruisce un sistema formale che rifletta, come allo specchio, la matematica reale (nel solito senso) per poi, nella matematica reale (nel suo senso) dimostrare che l'immagine riflessa è non-contraddittoria, cioè lecita. E se qualcuno gli domanda che cos'è la matematica, non gli resta che indicare l'immagine, dato che, avendo fatto tutto, non può più spiegare niente. Ma allora tanto vale che Hilbert lo dica chiaramente: vuole continuare a fare la matematica che ha sempre fatto e che lo ha fatto diventare Hilbert. La pseudogiustificazione che propone è un fragile alibi per poter dire che ha riflettuto, mentre in realtà ha solo guardato una immagine riflessa. (Di ben altra pasta è la riflessione di Brouwer.) Con ciò è chiaro che a mio parere il formalismo in quanto tale non ha nulla da dire dal punto di vista filosofico, anzi, è un tentato auto-fondamento che si rivela un auto-affondamento.

Tutto questo per dire che una giustificazione tutta interna alla matematica non esiste, bisogna cercarla anche fuori. Ma allora, lasciate le rassicuranti braccia del formalismo, torna a porsi la domanda: "Che cos'è la matematica?" ossia "Quali sono le basi della matematica (e della logica)?". Secondo me è una fortuna che tali basi, senza nient'altro sotto, non esistano e per questo mi piace piuttosto chiamarle radici, con tutto ciò che la parola evoca: più *giù si va, più si arriva a problemi coinvolgenti, non formulabili matematicamente. In tal senso, una "matematica senza fondamenti", ma non perchè "tutto è lecito, purchè funzioni": lo spazio per la filosofia non viene certo a mancare, anzi si allarga. Infatti, scartate le risposte per estensione (cioè le liste di risultati, come ad esempio Courant-Robbins, o di esperienze, linguaggi, teorie e risultati, come il più moderno Davis-Hersch), nemmeno la risposta per intensione di Martin-Löf (cioè la matematica come scienza della conoscenza dimostrata) può bastare, finchè non si sia in qualche modo risposto alla domanda successiva: "Che cos'è una dimostarzione?". Lasciandoci trascinare, un po' per gioco, da tali ingenue domande, si arriva presto molto indietro, cioè alla nascita della cultura (logico-matematica) o, equivalentemente (sono infatti convinto che sussistano forti analogie tra l'evoluzione storica della cultura collettiva e la crescita culturale di un singolo individuo), alla nascita culturale di ciascun individuo. Scegliendo la seconda strada, che è forse la sola davvero percorribile, mi è possibile affrontare, con un linguagggio naïf, problemi altrimenti ampiamente discussi nella filosofia tradizionale. Perciò proviamo, per quanto possibile, a partire dalla nascita (biologica) di un individuo e a ripercorrere le tappe dello sviluppo mentale, mettendo in evidenza quel che riguarda la formazione dei principi logici e l'uso delle astrazioni matematiche.*

Molte teorie sono concordi nel dire, e anche una superficiale esperienza con i bambini ce lo conferma, che nei primi mesi di vita il bambino vive in una totalità per cui non c'è distinzione tra interno ed esterno, cioè non c'è sostanziale differenza tra la realtà esterna (percezioni) e le creazioni interne (fantasie). Così lui coincide con tutto e può controllare tutto, senza alcuna limitazione (ma il contatto e la coesione su tutto è il più triste degli isolamenti: come non ricordare il Brouwer delle prime righe di Leven, Kunst en Mystiek?). Si è così già posto implicitamente un problema spinoso e, secondo me, centrale: come inizia il processo che porterà l'individuo a riconoscere una realtà interna come distinta da una realtà esterna, ad accettare i suoi limiti, a trasformare, almeno parzialmente, le fantasie in percezioni e pensieri?

Il problema sembra centrale anche per noi. Infatti, le stesse teorie concordano nel dire che in questo primo stadio la logica, se così vogliamo chiamarla, del bambino è irrazionale, contraddittoria, pazza. Vediamo infatti che

1. Non è in atto il principio di non-contraddizione, nel senso che è possibile che un bambino creda (allucini, fantastichi, subisca) sia A che non-A (senza per questo essere buttato, come farebbe un logico con un sistema contraddittorio). In questo non è poi così lontano dall'adulto: ogni individuo crede vere tutte le proposizioni che enuncia, e la falsità compare solo dopo un confronto con la realtà. Così per un bambino, in mancanza di realtà, la verità non ha limiti.

2. A implica B è confuso con B implica A (che è anche confermato dalla pratica dell'insegnamento della logica!). Ad esempio, Sara (due anni) mi chiede: "Come mai questo giocattolo è rotto?", Io: "Qualcuno l'ha pestato.", Sara: "Perchè?", Io: "Per distrazione.", Sara: "No, qualcuno l'ha pestato perchè è rotto!".

3. aRb è confuso con bRa (le relazioni sempre simmetriche di Mattè-

Blanco), che è visibile a lungo nei bambini, ad esempio nel gioco di scambiare i ruoli genitore figlio.

etc.

Questa logica infantile accompagna ogni individuo anche nella maturità, ad esempio nei sogni. Così il problema prima esposto può essere anche così riformulato: come si passa dalla logica infantile ad una logica razionale, adulta? E questa è la parafrasi di un problema forse vecchio quanto la filosofia, ma ben presente, in questi stessi termini, anche a matematici, come Brouwer (quando dice che il self ha una logica che non obbedisce a principi ed inesprimibile; e la sua risposta è radicalmente mistica) o Enriques (come ben noto, l'interesse per la genesi psicologica della scienza, in particolare della logica, gli è costato caro). E' forse la consapevolezza di toccare temi ormai classici della psicologia che oggi trattiene logici e matematici dentro confini tacitamente accettati o addirittura proclamati con vanto. Ma nemmeno un filosofo come Paolo Rossi si lascia andare: "Molte di queste affermazioni (di Enriques) si presterebbero ad essere tradotte in un altro linguaggio facendo ricorso a termini come identificazione dell'Io, narcisismo, principio di realtà, radici emotive dei processi razionali, e così via. Resisterò a questa tentazione."). Sono convinto, invece, che a tale tentazione si possa cedere, almeno quel che basta per superare un'inibizione che certo non giova. Anzi, il risultato può essere una liberazione che aiuta ad affrontare vecchi problemi con occhi nuovi. Cercherò di darne un'idea.

Innanzitutto, il passaggio dalla logica infantile ad una razionale non è necessario (anzi, esistono persone a cui non riesce e proprio per questo sono catalogate pazze, dal buon senso), ma dipende probabilmente da doti naturali ed esperienze (la destra direbbe solo le prime, la sinistra solo le seconde). Primo corollario: la logica razionale non è a priori, non è necessaria, non è il motore primo. Anzi, varie logiche sono possibili, e forse si potrebbero classificare proprio misurandone la distanza da quella infantile.

Sembra che, nello sviluppo mentale, il primo concetto che si forma sia quello di interno-esterno, che è una prima forma di spazio, acquisito forse dalla percezione del contatto con la pelle. Come non ricordare allora che Enriques classifica le percezioni associandole ai diversi tipi di geometria, correlando il "senso tattile generale" (cioè, escluse le mani) con la topologia? Si può immaginare che la percezione della propria pelle sia ottenuta con ripetuti contatti, cioè con successive esclusioni di parti di spazio come esterne. Così la pelle risulterebbe la frontiera di un chiuso (il me, il proprio corpo) e il primo concetto (matematico) quello di spazio con topologia, piuttosto che di insieme. (E se è così, Cantor avrebbe fatto meglio a seguire il garbato consiglio di Dedekind di non trascurare la continuità, e Brouwer avrebbe potuto accettare più esplicitamente qualche principio sulla natura dello spazio, risparmiandosi così la faticosa ri-costruzione dei numeri reali, basata sostanzialmente solo sul concetto di tempo, che sembra si sviluppi più tardi: ma come per Hilbert, così nè Cantor nè Brouwer potevano fare simili osservazioni, perchè i loro bisogni, dichiarati, erano altri).

Ma, a guardar bene, un concetto di oggetto o di spazio esterno non è possibile se non c'è già una qualche idea di coerenza interna.

Ce lo ricorda Enriques: "... gli oggetti presi come elementi del processo logico, sono degli invarianti rispetto al movimento del pensiero, ed in ispecie alle operazioni associative e dissociative. Le condizioni d'invarianza vengono espresse dai principi logici" ed Enriques ne isola tre:

1) il principio di identità, "l'oggetto può essere riconosciuto come qualcosa d'identico, attraverso rappresentazioni successive";

2) il principio di contraddizione, "esclude che due oggetti, distinti in una data rappresentazione, sieno pensati come identici in una successiva";

3) il principio del terzo escluso, "tra due oggetti, contemporaneamente pensati, ha luogo sempre il giudizio d'identità o di distinzione" (ma si noti che questo non è il terzo escluso classico).

E conclude: "... i principii conferiscono agli oggetti del pensiero una realtà psicologica, indipendente dal tempo, e sono quindi il presupposto di una Logica simbolica, la quale miri a rappresentare, come insieme di rapporti attuali, il processo genetico delle operazioni logiche". Sembra che per Enriques il passaggio dalle immagini, o rappresentazioni, ai pensieri sia il prodotto di una logica minimale, non formalizzabile, probabilmente innata e comunque non analizzata. "Le condizioni d'invarianza, espresse dai principii logici, vengono volontariamente fissate per ogni oggetto, che sia pensato come tale; 'pensare un oggetto' significa appunto determinarlo e distinguerlo come riconoscibile, cioè inibire il corso delle associazioni inconsce, che tenderebbero a modificare la rappresentazione."

Anche il viceversa è vero, cioè, come dice Brouwer, la matematica

e soprattutto la logica nascono come una forzatura (noi diremmo, una rielaborazione) della realtà operata dall'intelletto. In altri termini, il soggetto fonda la propria coscienza sul riconoscimento di una realtà esterna (il solipsismo di Brouwer interviene solo prima o dopo tale riconoscimento). Un esempio per tutti è la definizione intuizionista della negazione: asserire non-A, coscientemente, vuol dire riconoscere come impossibile (nella realtà!) ogni costruzione (verifica, prova) di A. Per coglierne il significato, il soggetto deve poter uscire dall'onnipotenza costruttrice (vedi 1.) e accettare che qualcosa gli è impossibile, cioè accettare una realtà da lui indipendente.

Siamo così tornati dentro il circolo che cercavamo di spezzare e che per il bambino è la gabbia della propria onnipotenza: ogni mezzo per uscirne sembra dipendere dall'esserne già usciti. Questo paradosso, riassumibile nella catena

$$\text{logica} \rightleftarrows \text{realtà}$$

fa parte della vita ed è irrisolvibile intellettualmente. Ciascuno di noi ne esce, secondo Winnicott, soltanto tramite il gioco, inteso come ricostruzione simbolica interna della realtà esterna. Questo presume, per Winnicott, l'esistenza di una terza area, ambiente comune di ogni prodotto creativo simbolico (in particolare arte, religione, filosofia, scienza). In questo senso, la matematica è un gioco culturale (e questa, al di là delle applicazioni, mi sembra la sua principale funzione) e la logica ne studia le regole. Giocare con i simboli seguendo Hilbert e le sue regole può quindi essere il primo passo della riflessione sui fondamenti, purchè si sappia al momento opportuno smettere di giocare (mentre Hilbert teorizza il *continuare, una posizione espressa da Davis-Hersch molto efficacemente: "I find mathematics an infinitely complex and mysterious world; exploring it is an addiction from which I hope never to be cured"). Ma d'altra parte, giocare sempre da soli, cioè senza permetterselo, come fa Brouwer, è poco divertente (soprattutto per chi sta a guardare). Tra i due estremi, ciascuno trova il proprio rapporto con il gioco, cioè il proprio modo di fare il mestiere di logico e matematico, cioè la propria filosofia sui fondamenti. Questa relazione non è che un racconto, purgato e condensato, di quel che ho trovato finora nel mio viaggio alla ricerca del vero gioco creativo. Ma anche questo è un assoluto che non esiste di per sè e perciò, come il viaggio, questo racconto non ha fine.*

Testi citati

L.E.J.Brouwer, Collected Works, ed.A.Heyting, North-Holland 1975

R.Courant-H.Robbins, What is mathematics?, Oxford U.P. 1941, trad. ital.: Che cos'è la matematica?, Einaudi 1950

P.J.Davis-R.Hersch, The mathematical experience, Birkhäuser 1981 (a pag.2)

F.Enriques, I problemi della scienza, Zanichelli 1906 (a pag.194-195)

P.Rossi, Federigo Enriques storico della scienza, in: Federigo Enriques, Approssimazione e verità, Belforte 1982 (a pag.62)