Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



# COLLEZIONI DI BACHMANN.GIARDINI.APPLICAZIONI RECENTI.

V.Michele ABRUSCI (Dipartimento di Filosofia,Firenze)

1. - Ricordo brevemente, rinviando alla letteratura, cosa sono le <u>collezioni di Bachmann</u> . Una collezione di Bachmann di <u>altezza</u> $\beta$ e di <u>tipo</u> $\gamma$ è una collezione di ordinali $\leq \beta$ dove per ciascun ordinale limite $\alpha \leq \beta$ è fissata una "successione fondamentale" $[\alpha](.)$ di lunghezza $\leq \gamma$ ( una funzione strettamente crescente e continua nei limiti, definiti per ogni $\zeta < cf(\alpha) \leq \gamma$ , convergente ad $\alpha$ ; $cf(\alpha)$ ="cofinalità di $\alpha$ ) , con alcune proprietà che mettono in relazione tra di loro le successioni fondamentali ( preminente è la "nesting property", proprietà dell'inserimento). Le collezioni di Bachmann servono per costruire gerarchie di funzioni ordinali.

<u>Esempio A</u>. Mediante una collezione di Bachmann di altezza $\epsilon_0$ e di tipo $\omega$ si costruisce la seguente gerarchia (la "gerarchia veloce") di funzioni numeriche (definite per $x < \omega$ =tipo della collezione): $(f_\alpha)_{\alpha \leq \epsilon_0}$

$f_0(x) = x$

$f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha(x+1)$

$f_\alpha(x) = f_{[\alpha](x)}(x)$ se $\alpha$ è limite $\leq \epsilon_0$

Proprietà: per ogni $\alpha < \epsilon_0$ $f_\alpha$ è una funzione dimostrabilmente totale in PA (aritmetica di Peano) , $f_{\varepsilon_0}$ non è una funzione dimostrabilmente totale in PA.

<u>Esempio B</u>. Mediante una collezione di Bachmann di altezza $\varepsilon_{\Omega+1}$ e di tipo $\Omega$ ($\Omega$ è il primo ordinale non numerabile e $\varepsilon_{\Omega+1} = \sup_n (\Omega_{(n)} = \underbrace{\Omega^{\cdot^{\cdot^{\Omega}}}}_{n \text{ volte}}))$, si costruisce la seguente "gerarchia di Bachmann" di funzioni definite sugli ordinali numerabili (definite per $x < \Omega$ = tipo della collezione) : $(\psi_\lambda)_{\lambda \leq \varepsilon_{\Omega+1}}$

$$\psi_0(x) = x$$

$$\psi_{\lambda+1}(x) = \psi_\lambda(\omega^x)$$

$$\mathrm{rg}\,\psi_\lambda = \bigcap_{\gamma<\lambda} \mathrm{rg}\,\psi_{[\lambda](\gamma)} \quad \text{, se } \lambda \text{ è limite, } cf(\lambda)=\lambda<\Omega$$

$$\psi_\lambda(x) = \psi_{[\lambda](x)}(0) \quad \text{, se } \lambda \text{ è limite, } cf(\lambda) = \Omega .$$

Proprietà: $\psi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0)$ è l'ordinale di Howard ( l'ordinale della teoria $ID_1$ delle definizioni induttive).

2. - La $\Pi^1_2$-logica ha generalizzato il concetto di "successione fondamentale" in quello di <u>fiore</u>, e il concetto di "collezione di Bachmann" in quello di <u>giardino</u>. Con questi nuovi concetti viene semplificato l'uso delle collezioni di Bachmann e si sono ottenuti risultati importanti quali il teorema della comparazione delle gerarchie ( GIRARD). - Si consideri la categoria ON (oggetti: gli ordinali) e la categoria $ON_1$ (oggetti: gli ordinali e le classi-ordinali D(On) dove



On è la classe degli ordinali e D varia sui dilatatori). Per ogni oggetto y di $ON_1$, si definisce un "giardino $J_y$ di tipo ON", assegnando a ogni limite $z \leq y$ un fiore $F_z$ e imponendo su questi fiori condizioni analoghe a quelle imposte sulle successioni fondamentali nelle collezioni di Bachmann. I fiori sono in particolare "successioni fondamentali", e il fatto che essi commutano ai limiti diretti comporta che queste "successioni fondamentali" sono univocamente determinate dalla loro restrizione ai numeri naturali. Inoltre, per ON può essere preso $\omega$ , $\Omega$ o qualunque cardinale regolare: così, dato un giardino, si hanno collezioni di Bachmann di ciascun tipo , ovvero le successioni fondamentali hanno una lunghezza "estensibile". - Esiste un isomorfismo tra "dilatatori" e "giardini", cosicchè in pratica (perdendo un pò di intuitività) si preferisce lavorare sui dilatatori. - L'operazione con cui, data una collezione di Bachmann, si costruisce una gerarchia di funzioni, viene espressa in modo generale mediante un funtore , il funtore $\Lambda$ , che ad ogni giardino ( ad ogni dilatatore) associa una funzione normale. In particolare , il dilatatore $(1+Id)_{(\omega)} = \sup_n ( (1+Id)_{(n)} = \underbrace{(1+Id)^{\cdot^{\cdot^{(1+Id)}}}}_{n \text{ volte}}$ corrisponde alla collezione di Bachmann dell'esempio B, e l'ordinale di Howard è $\Lambda((1+Id)_{(\omega)})(1)$ .

3. - Lo studio delle successioni di Goodstein tradizionali e quello delle successioni di Goodstein inverse costituiscono recenti esempi di applicazione delle collezioni di Bachmann e delle gerarchie su di esse costruite.

In ABRUSCI-GIRARD-VAN DE WIELE [1] è dimostrato (in un nuovo modo) che il teorema di Goodstein comporta che $f_{\epsilon_0} = f_{\omega_{(\cdot+1)}}(\cdot)$ è una funzione totale; ma $f_{\epsilon_0}$ non è dimostrabilmente totale in PA, e dunque il teorema di Goodstein non è dimostrabile in PA.

In ABRUSCI-GIRARD-VAN DE WIELE [2] sono introdotte e generalizzate le "successioni di Goodstein inverse" (in cui sostanzialmente si aggiunge "1" invece di sottrarlo...) che terminano quando all'y-esimo termine della successione si ottiene $(1+\mathrm{Id})_{(\omega)}(y)$; e viene dimostrato che $\psi_{\epsilon_{\Omega+1}}(0)$ è l'ordinale in cui si ferma la successione inversa di Goodstein che parte da 0. Dunque, il teorema che "ogni successione di Goodstein inversa termina" non è dimostrabile in $ID_1$. L'uso della $\Pi^1_2$-logica in questo risultato è essenziale.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRUSCI-GIRARD-VAN DE WIELE, Some uses of dilators in combinatorial problems, Part I, Dip.Mat. Siena, Quad. 101, 1984.

[2] ABRUSCI-GIRARD-VAN DE WIELE, Some uses..., Part II, in preparation.



[3] ABRUSCI V.M., Usi dei dilatatori:problemi combinatori, risultati combinatori non dimostrabili in PA o in $ID_1$, in questo volume (Siena, incontro di logica dell'aprile 1983).

[4] ACZEL P., Describing ordinals using functionals of transfinite type, Journal of Symbolic Logic, 37, (1972), pp.35-47.

[5] BACHMANN H., Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, Vierteljahrsdrift der Naturforscherden Gesellschaft in Zürich, vol. 95 (1950), pp.5-37

[6] GIRARD J.Y., $\Pi^1_2$-logic. Part I: Dilators, Annals of mathematical logic, 21 (1981), pp.75-219.

[7] GIRARD J.Y., VAUZEILLES J., A functorial construction of the Bachmann hierarchy, to appear in Journal of Symbolic Logic

[8] VAUZEILLES J., Jardins, dilatateurs, β-démonstrations et une application en récursion generalisée, Thése d'Etat, Paris, Université Paris 7, 1983.