Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

MODELLI f-AMMISSIBILI DI TEORIE DEGLI INSIEMI *

MARCO FORTI - Dip. di Matematica - Università di Pisa.

0. L'uso di relazioni f-ammissibili per costruire modelli di teorie degli insiemi di tipo Gödel-Bernays è stato introdotto in [1] allo scopo di dimostrare la consistenza relativa degli assiomi di libera costruzione ivi trattati.

Costruzioni analoghe erano state introdotte indipendentemente anche in [5] per stabilire la relativa interpretabilità di teorie più deboli di ZF e in [4] per lo studio di analoghi problemi in teoria costruttiva degli insiemi.

Modelli f-ammissibili sono usati anche in [2,3] nello studio dei rapporti intercorrenti fra varie formulazioni assiomatiche dei principi di scelta e di libera costruzione. A tale scopo è necessario associare ad un modello base $\mathfrak{M}$ un modello f-ammissibile $\mathfrak{N}$, verificante un assioma di libera costruzione, che mantenga alcune caratteristiche essenziali del modello di partenza (in modo che, p. es., se $\mathfrak{M}$ discrimina due assiomi di scelta S_1 ed S_2, anche $\mathfrak{N}$ verifichi l'uno e non l'altro). Inoltre non si possono in generale assumere in $\mathfrak{M}$ le forti proprietà che avevano semplificato la costruzione in [1].

---

* I risultati qui esposti sono integralmente frutto della collaborazione scientifica dell'autore con F. Honsell, col cui consenso sono qui pubblicati.
L'autore ringrazia E. De Giorgi e M. Boffa per utili discussioni sull'argomento.

In questa nota si isoleranno le condizioni essenziali alla costruzione di modelli f-ammissibili ed alcune proprietà dei loro universi.

La teoria degli insiemi di base sarà quella di Gödel-Bernays senza fondazione né scelta (cioè con gli assioni dei soli gruppi ABC). Per le notazioni ci si atterrà ad [1], cui si rimanda anche per tutte le definizioni non ripetute qui.

1. Sia $f : A \to \mathcal{P}(A)$ una funzione fissata (A può essere un insieme o anche una classe propria).

Una funzione $g : A \to E$ si dice f-<u>induttiva</u> se $g(a)=\hat{g}(f(a))$ $\forall a \in A$ (noteremo sempre $\hat{f}(x) = \{f(y) \mid y \in x \cap \operatorname{dom} f\}$).

Data una relazione riflessiva e simmetrica $R \subseteq A^2$ si definisce la relazione $\tilde{R}$ mediante

$$\tilde{R}=\{(x,y) \mid \forall s \in f(x) \exists t \in f(y) \ sRt \ \& \ \forall t \in f(y) \exists s \in f(x) \ tRs\}.$$

La relazione R si dice <u>f-conservativa</u>, <u>f-compatibile</u>, <u>f-ammissibile</u> secondoché si abbia $R \subseteq \tilde{R}$, $R \supseteq \tilde{R}$, $R = \tilde{R}$ rispettivamente.

Data una relazione R f-conservativa (risp. f-compatibile) esiste la <u>minima</u> relazione f-ammissibile $\check{R} \supseteq R$ (risp. la <u>massima</u> relazione f-ammissibile $\mathring{R} \subseteq R$); essa può essere definita per induzione ordinale ponendo

$$R_0 = R, \quad R_{\alpha+1} = \tilde{R}_\alpha, \quad R_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} R_\alpha \quad (\text{risp. } R_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} R_\alpha) \text{ per } \lambda \text{ limite.}$$

Tale procedura conserva la transitività, e quindi se R è un'equivalenza anche $\check{R}$ (risp. $\mathring{R}$) lo sono. In particolare esistono la minima e la massima equivalenza f-ammissibile (precisamente $\check{=}$ e

$\overset{\circ}{A^2}$), che saranno indicate con $\equiv_f$ e $\approx_f$ rispettivamente.

Si noti che ad ogni <u>funzione</u> f-<u>induttiva</u> g è naturalmente associata un'<u>equivalenza</u> f-<u>ammissibile</u> $R_g=\{(x,y) \mid g(x)=g(y)\}$. Il problema inverso di trovare una funzione f-induttiva che genera una data equivalenza f-ammissibile porta direttamente allo studio del <u>principio di libera costruzione</u>, per cui si rimanda a [1], come pure per le principali proprietà delle relazioni f-ammissibili, fra cui quelle sopra elencate.

2. Ogniqualvolta un'equivalenza f-ammissibile R è generata da una "proiezione canonica" $\pi : A \to B$ t.c. $x R y \Longleftrightarrow \pi(x)=\pi(y)$ si può definire su B una relazione binaria $\in_R$ ponendo

$$\pi(x) \in_R \pi(y) \Longleftrightarrow \pi(x) \in f_R(\pi(y)) = \hat{\pi}(f(y))$$

(f_R è la funzione che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(A) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \hat{\pi} \\ B & \xrightarrow{f_R} & \mathcal{P}(B) \end{array}$$

).

Per ogni $E \subseteq A$ si definisca la sua saturazione (rispetto ad R) ponendo $\operatorname{sat}_R E = \{x \in A \mid \exists y \in E \ xRy\}$.

Si ha allora (vedi [3])

<u>Teorema</u>: $(B, \in_R)$ <u>è un modello di</u> ZF_0 <u>se sono verificate le seguenti condizioni</u>:

(i) $\forall C \subseteq E \times \mathcal{P}(A)$ t.c. $(x,y) \in C \ \& \ (x,y') \in C \Rightarrow \operatorname{sat}_R y = \operatorname{sat}_R y'$ $\exists c \in A$ t.c. $\operatorname{sat}_R f(c) = \operatorname{sat}_R \{a \in A \mid \exists y \in \operatorname{cod} C \ \operatorname{sat}_R y = \operatorname{sat}_R f(a)\}$

(ii) $\exists a \exists \varphi : \omega \to f(a)$ t.c. $n \neq m \Rightarrow \varphi(n) \not R \varphi(m)$.

Il modello $(B, \in_R)$ può essere esteso in modo naturale ad un mo dello di ABC, che si indicherà con $\mathfrak{U}/R$ e sarà detto modello f-ammissibile generato dalla relazione R; basta prendere come classi di $\mathfrak{U}/R$ le immagini mediante π delle sottoclassi di A e come appartenenza ad una classe propria di $\mathfrak{U}/R$ la vera appartenenza (ovviamente le classi proprie sono quelle che non appartengono ad $\hat{f}_R(B)$).

Quando le costruzioni precedenti sono intese in modo assoluto, e anche quanto sono relativizzate ad un modello base $\mathfrak{M}$ (purché non solo R ma anche π sia una classe in $\mathfrak{M}$) la condizione (i) si riduce a (i)* $f_R : B \to \mathcal{P}(B)$ è surgettiva, che è la condizione assunta nel teorema 3.8 di [1].

La (i) richiede in generale che ad ogni collezione di parti di A parametrizzata da un insieme corrisponda un elemento di B; essa è sufficiente ad ottenere la validità di tutti gli assiomi escluso quello dell'infinito (che segue da (ii)). La (i) può valere però solo se A è una classe propria in $\mathfrak{M}$, e quindi l'esistenza di π non è garantita a priori, a meno che $\mathfrak{M}$ non verifichi l'assioma

H_o : Ogni relazione di equivalenza possiede una proiezione canonica.

Tale assioma, ovviamente assai più debole di

H : Ogni relazione di equivalenza possiede una classe di rappresentanti, segue già, col ben noto "trucco di Scott", dall'assioma di fondazione D; in realtà per avere H_o è chiaramente sufficiente un assioma di accumulazione o stratificazione, come

RA: $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ i.e. l'universo è unione di insiemi indicizzata con ordinali. (H è invece una fortissima forma di scelta, ed è aperto il problema se H implichi un buon ordinamento dell'universo).

Si osservi però che per dedurre (ii) da (i) non occorre in realtà che l'intera funzione π sia in $\mathfrak{M}$, ma bastano delle "approssimazioni locali" di π. Più precisamente si assuma che $\mathfrak{M}$ verifichi l'assioma seguente (che non implica alcuna forma globale di scelta)

$\forall x SC^x$: Ogni relazione binaria il cui dominio è un insieme include una funzione con lo stesso dominio;

allora la condizione (i) è sufficiente perché $\mathfrak{U}/R$ sia un modello di ABC.

3. Dati due modelli $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ di ABC diremo che $\mathfrak{N}$ è un sopramodello controllato di $\mathfrak{M}$ o che $\mathfrak{M}$ è un sottomodello controllante di $\mathfrak{N}$ (in simboli $\mathfrak{M} << \mathfrak{N}$) se

(a) le classi di $\mathfrak{M}$ sono le sottoclassi, in $\mathfrak{N}$, dell'universo M di $\mathfrak{M}$;

(b) gli insiemi di $\mathfrak{M}$ sono i sottoinsiemi di M in $\mathfrak{N}$ (i.e. $M = \mathcal{P}^{\mathfrak{N}}(M)$);

(c) l'universo N di $\mathfrak{N}$ è equipotente, in $\mathfrak{N}$, ad M (i.e. $\mathfrak{N} \models V \simeq M$).

Se il modello base $\mathfrak{M}$ verifica l'assioma di von Neuman $V \simeq Ord$ (come in [1] thms 4.2, 4.5) la condizione (i)* è sufficiente per garantire che ogni modello f-ammissibile $\mathfrak{N} = \mathfrak{U}/R$ è un sopramodello controllato di $\mathfrak{M}$ in quanto allora π è in $\mathfrak{M}$ e ogni classe propria è equipotente in $\mathfrak{M}$ all'universo.

Condizioni meno restrittive consentono comunque di costruire sopramodelli f-ammissibili controllati. Poiché l'uso dei modelli f-ammissibili è particolarmente indicato per ottenere modelli di assioni di libera costruzione, terminiamo questa nota con alcuni teoremi al riguardo.

Richiamiamo qui i seguenti assiomi (che sono i più forti fra quelli studiati in [1]):

X_1: Per ogni funzione f esiste un'unica funzione f-induttiva g;

X_1^t: Per ogni funzione iniettiva f che induce l'identità su un insieme transitivo T esiste una funzione iniettiva f-induttiva g che è l'identità su T.

Denotando con Π la classe degli insiemi ben fondati si ha

Teorema 1: Dato $\mathfrak{M} \models ABCD$ esiste un modello $\mathfrak{N} \models ABCX_1$ tale che $M = \Pi^{\mathfrak{N}}$; $\mathfrak{N}$ è unico (a meno d'isomorfismi) e si ha $\mathfrak{M} << \mathfrak{N}$

Pertanto ogni modello di $ABCX_1$ è determinato univocamente dai suoi insiemi ben fondati e verifica l'assioma $V \simeq \Pi$.

Teorema 2: Dato $\mathfrak{M} \models ABCD$ esiste un modello $\mathfrak{N} \models ABCX_i^t$ tale che $M = \Pi^{\mathfrak{N}}$ e $\mathfrak{M} << \mathfrak{N}$.

Più in generale se $\mathfrak{M} \models ABCH_o$ esiste un sopramodello controllato $\mathfrak{M} << \mathfrak{N}$ t.c. $\mathfrak{N} \models ABCX_i^t$.

Per dimostrazioni e risultati ulteriori (in particolare in rapporto con assiomi di scelta) si rimanda a [2], [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] Forti, M. - Honsell, F. - "Set Theory with Free Construction Principles". Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa - Cl. Sc. - Vol. 10 Sez. IV (1983) pp. 493-522.

[2] Forti, M. - Honsell, F. - "Axioms of Choice and Free Construction Principles I" - Bull. Soc. Mat. Belg. (in corso di pubblicazione).

[3] Forti, M. - Honsell, F. - "Axioms of Choice and Free Construction Principles II" (in preparazione).

[4] Gordeev, L. - "Constructive Models for Set Theory with Extensionality". In "The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium" (A. S. Troelstra - D. van Dalen, eds.) - North Holland, Amsterdam 1982, pp. 123 - 147.

[5] Hinnion, R. - "Extensional Quotients of Structures and Applications to the Study of the Axiom of Extensionality" - Bull. Soc. Mat. Belg., Vol. 33 fasc. II, ser. B (1981) pp. 173-206.