Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

CALCOLABILITA' NEI TEMPI SUPERIORI E IL DOMINIO UNIVERSALE Pω (*)

G. LONGO, S. MARTINI

La calcolabilità nei tipi superiori, nel passato studiata approfonditamente da matematici e logici, è stata di recente oggetto di attenzione anche da parte di ricercatori di Informatica Matematica: l'osservazione che le trasformazioni effettive di funzioni sono (modelli di) programmi che agiscono su altri programmi è fin troppo ovvia. In effetti il lavoro che qui si vuole brevemente presentare è stato suggerito sia da motivazioni "informatiche" che da interessi "logico-matematici". L'idea originale, infatti, di estendere la nozione di operatore di enumerazione per Pω (Rog [1967]) di tipi superiori, e di indagare dunque le relazioni tra questo concetto ed alcune classi di funzionali effettivi (in particolare i funzionali calcolabili di Yu. Ershov, Er [1976]) sembrava di un certo interesse per la teoria della calcolabilità. D'altra parte l'"approccio astratto" alla calcolabilità nei tipi di Ershov (ispirato a Scott, Scott [1981]) è fortemente legato ad una delle problematiche più attuali dell'Informatica Matematica, cioè la ricerca e lo studio di "strutture dati" astratte su cui si possono introdurre nozioni di effettività. E' stato allora interessante vedere come tali strutture astratte (i domini di Scott, vedi più sotto) potessero essere immerse all'interno di Pω in modo da mantenere (in tutti i tipi) esattamente le caratteristiche dell'immersione dei funzionali di tipo 2 data da Myhill e Sheperdson in Pω stesso (MS [1955]), i.e. corrispondenza tra oggetti calcolabili e insiemi r.e., applicazione funzionale rappresentata mediante l'operazione di "applicazione"

(".") in $P\omega$). Così facendo si riescono anche a caratterizzare, in una opportuna struttura di tipi all'interno di $P\omega$, diverse classi di funzionali introdotte in passato nelle letteratura.

§1. Dominî e $P\omega$

La nozione di dominio è stata introdotta da Scott [1981]: sia $(X,\le)$ un isieme parzialmente ordinato e si ponga $\check{x} = \{y\in X/x\le y\}$. Un dominio è allora un c.p.o algebrico $(X,X_o,\le)$, dove $X_o = \{x\in X/\check{x}$ è aperto nella topologia di Scott$\}$ (l'insieme degli elementi compatti) e X_o ha "bounded joins"; ovvero se $x_o,y_o\in X_o$ sono compatibili (i.e. $\exists z\in X\ x_o,y_o\le z$; notazione $x_o\uparrow y_o$) allora $x_o\sqcup y_o$ esiste in X_o. Un dominio presentato effettivamente (p. eff.) $(X,X_o,\nu,\le)$ è un dominio a base numerabile tale che, per l'enumerazione fornita $\nu:\omega\to X_o$, $\nu(n)\uparrow\nu(m)$ è decidible in n ed m e $\nu(n)=\nu(p)\sqcup\nu(q)$ è decidibile in n,p,q. Un elemento x di un dominio p. eff. $(X,X_o,\nu,\le)$ è calcolabile se $\{n/\nu(n)\le x\}$ è r.e. (notazione: $x\in X_c$). Dal momento che la categoria dei domini è cartesiana chiusa (con le funzioni continue come morfismi) le nozioni di compatto e di elemento calcolabile sono immediatamente ereditate ai tipi superiori. $Cont(X,Y)_c$ son le funzioni continue e calcolabili da X a Y. Per verificare che una funzione è calcolabile è utile il seguente

1.1 Lemma. Sia ν e μ le enumerazioni di X_o e Y_o (rispett.) $f\in Cont(X,Y)_c$ sse $f\in Cont(X,Y)$ e $\mu(n)\le f(\nu(m))$ è semidecidibile in n ed m.

Dato un dominio $(X,X_o,\le)$ e $Y\subseteq X$ la topologia (di Scott) di X induce su Y una struttura; posto $Y_o = \{y\in Y/\check{y}\subseteq Y$ è aperto nella topologia indotta$\}$, vale infatti il

1.2 Lemma. Sia $(X,X_o,\le)$ un dominio. Per ogni $Y\subseteq X$, chiuso di X, $(Y,Y_o,\le)$ è un dominio.

1.3 Definizione. Sia $(X,X_o,\le)$ un dominio p. eff.. $Y\subseteq X$ è effettivo sse $\nu(n)\in Y$ è ricorsiva in n.

Chiaramente ogni sottoinsieme chiuso ed effettivo Y di un dominio p. eff. X è anch'esso un dominio p. eff. e si ha $Y_c = Y\cap X_c$.

Si noti adesso che, fissata un'enumerazione $\{e_n\}_{n\in\omega}$ dei sottinsiemi finiti, $(P\omega,P\omega_o,\subseteq)$ è un dominio p. eff. Ebbene tale dominio è "universale" nel senso che ogni altro dominio p. eff. vi può essere immerso nel senso della seguente

1.4 Definizione. Dati due insiemi X ed Y, una retrazione (g,f) è una coppia di funzioni $g:X\to Y$, $f:Y\to X$ t.c. $f\circ g = id_X$ (notazione: $X\triangleleft Y$ via (g,f)). Se X ed Y sono domini p. eff. e f,g continue e calcolabili si scriverà $X\triangleleft_c Y$.

1.5 Teorema. Sia $(X,X_o,\le)$ un dominio p. eff. Esiste allora $A_X\subseteq P\omega$ chiuso ed effettivo t.c. $X\triangleleft_c A_X$.

§2. Strutture di tipi in $P\omega$

Siano $a,b\in P\omega$. Si definisca

$$a\cdot b = \{m/\exists e_n\subseteq b\ \langle n,m\rangle\in a\}\subseteq P\omega.$$

Dati $A,B\subseteq P\omega$ si ponga

$$A\to B = \{d\in P\omega/\forall a\in A\ da\in B\}\subseteq P\omega.$$

Per quanto riguarda il prodotto si definisca, per $a,b\in P\omega$

$$\langle\langle a,b\rangle\rangle = \{\langle 1,n\rangle/n\in a\}\cup\{\langle 2,n\rangle/n\in b\}$$

e dunque

$$A\underset{\omega}{\times} B = \{\langle\langle a,b\rangle\rangle/a\in A \ \underline{\text{and}}\ b\in B\}\subseteq P\omega$$

2.1 Teorema. Siano A,B sottinsiemi chiusi (ed effettivi) di

$P\omega$. Allora $A \to B$, $A \underset{\omega}{\times} B$ e $A \cap B$ sono chiusi (ed effettivi).

2.2 Definizione. I simboli di tipo generalizzati T sono il minimo insieme contenente l'insieme AT dei tipi atomici $\phi,\psi,\ldots$ e t.c., se $\sigma,\tau \in T$, allora $\sigma\to\tau$, $\sigma\times\tau \in T$.
I simboli di tipo estesi sono il minimo insieme T_E t.c. $T \subseteq T_E$ e se $\sigma,\tau \in T_E$ allora $\sigma\cap\tau \in T_E$.

In BCD [1981] i simboli di tipo estesi sono introdotti senza $\sigma\times\tau$, da noi usato per uniformità con la categoria dei domini che, come si è detto, è cartesiana chiusa. Tuttavia la nostra struttura con "$\to$" in $P\omega$ non è una categoria: ci sono infatti troppi morfismi per ciascuna funzione (considerata estensionalmente nel senso della teoria degli insiemi).

Siano, per $\phi,\psi,\ldots \in AT$, $V^\phi, V^\psi, \ldots \subseteq P\omega$.
Si ponga $V^{\sigma\to\tau} = V^\sigma \to V^\tau$; $V^{\sigma\times\tau} = V^\sigma \underset{\omega}{\times} V^\tau$; $V^{\sigma\cap\tau} = V^\tau \cap V^\sigma$. Se $\forall\phi \in AT$ V^ϕ è chiuso (ed effettivo) il teorema 2.1 mostra immediatamente che $\forall\sigma \in T_E$ V^σ è chiuso (ed effettivo) e dunque è un (sotto-) dominio p. eff. di $P\omega$.

Si è visto finora come all'interno di $P\omega$ sia possibile costruire una gerarchia di tipi dotata di un certo interesse; in particolare tale struttura è formata da domini (p. eff.) se gli insiemi di base sono chiusi (ed effettivi). D'altra parte si assuma, nella categoria dei dominî, che $\forall\phi \in AT$ $(X^\phi, X^\phi_o, \le)$ sia un dominio, e si ponga, per $\sigma,\tau \in T$: $X^{\sigma\to\tau} = \mathrm{Cont}(X^\sigma, X^\tau)$; $X^{\sigma\times\tau} = X^\sigma \times T^\tau$.
Il teorema che segue è il risultato principale che si vuole presentare ed è, sostanzialmente, la motivazione del lavoro svolto:

2.3 Teorema. Siano $(X^\phi, X^\phi_o, \le)$ dominî p. eff. $\forall\phi \in AT$. Si assuma che, per ogni $\phi \in AT$, $A^\phi \subseteq P\omega$ sia chiuso, effettivo e soddisfi $X^\phi \lhd_c A^\phi$.
Allora $\forall\sigma \in T$ $X^\sigma \lhd_c A^\sigma$.

Si noti che, poichè funzioni calcolabili portano elementi

calcolabili in calcolabili, $x \in X^\sigma_c$ corrisponde in A^σ ad un insieme r.e.

§3. Ricorsività

I risultati dei paragrafi precedenti permettono di immergere in una struttura di tipi in $P\omega$ la gerarchia dei funzionali continui e calcolabili (Er [1976]). L'immersione che si userà, diversa da quella del teorema 1.5, sarà altrettanto semplice e naturale.

Per mezzo dei funzionali continui e calcolabili Ershov ha dato caratterizzazioni dei funzionali numerabili di Kleene e Kreisel (Kle [1959], Kre [1959]) e delle Operazioni Ereditariamente Effettive, HEO (Tro [1973]).

Sia $\omega^\perp$ l'ordine parziale piatto degli interi e si dia ad ω la topologia discreta. $E = \mathrm{Cont}(\omega, \omega^\perp)$ sono allora le usuali funzioni parziali da ω in ω; E è un dominio p. eff. ed è isomorfo a

$$P = \{\{\langle n,m\rangle / m = f(n)\} / f \in E\}$$

Sia T un insieme di simboli di tipo generalizzati col solo tipo atomico (1), e si ponga, per $\sigma,\tau \in T$ $E^{(1)} = E$, $E^{\sigma\to\tau} = \mathrm{Cont}(E^\sigma, E^\tau)$, $E^{\sigma\times\tau} = E^\sigma \times E^\tau$; e $P^{(1)} = P$, $P^{\sigma\to\tau} = P^\sigma \to P^\tau$, $P^{\sigma\times\tau} = P^\sigma \underset{\omega}{\times} P^\tau$.
Se $G_{(1)}$ e $F_{(1)}$ sono l'isomorfismo tra $E^{(1)}$ e $P^{(1)}$, il teorema 2.3 dà immediatamente il seguente

3.1 Teorema. $\forall\sigma \in T$ $E^\sigma \lhd_c P^\sigma$ (via G_σ, F_σ).

Sia RE la collezione degli insiemi r.e. Come già osservato alla fine del paragrafo precedente, un funzionale calcolabile f di tipo $\sigma\to\tau$ ($f \in E^{\sigma\to\tau}$) è esattamente (e semplicemente) "rappresentato" da un insieme $G_{\sigma\to\tau}(f) \in (P^\sigma \to P^\tau) \cap RE$, ovvero da un insieme r.e. che porta, mediante ".", A^σ in A^τ. Si noti che $(P^{(1)} \to P^{(1)}) \cap RE$ sono esattamente gli operatori ricorsivi (Ro [1967]) e che il teorema 3.1 fornisce appunto una generalizzazione di tale concetto ai tipi superiori.

Possiamo dunque rappresentare funzionali (in ogni tipo) all'interno di $P\omega$: diremo che $a \in P^{\sigma}$ <u>rappresenta</u> $f \in E^{\sigma}$ sse $F_{\sigma}(a)=f$. Ovviamente ogni $f \in E^{\sigma}$ ha molti (infiniti!) rappresentati. Essi sono tuttavia ripartiti in classi di equivalenza che sono reticoli.

3.3 <u>Definizione</u>. $\sim_{(1)}$ sia la relazione di identità su $P^{(1)}$.
Per $a,b \in P^{\sigma\to\tau}$ si definisca

$$a \sim_{\sigma\to\tau} b \quad \text{sse} \quad \forall c \in P^{\sigma} \ ac \sim_{\tau} bc$$

$\sim_{\sigma\times\tau}$ è definita nel modo ovvio.

Due elementi a,b sono dunque $\sim_{\sigma\to\tau}$-equivalenti se a e b sono estensionalmente equivalenti su P^{σ}.

3.4 <u>Teorema</u>. Siano $a,b \in P^{\sigma}$. Si ha

(i) $[a]_{\sigma} = \{c \in P^{\sigma}/c \sim_{\sigma} a\}$ è un reticolo completo (rispetto a $\subseteq$)

(ii) $a \sim_{\sigma} b \quad F_{\sigma}(a) = F_{\sigma}(b)$.

<u>References</u>

BCD [1981] Barendregt,H., Coppo,M., Dezani-Ciancaglini,M., A Filter to lambda-model and the completeness at type assignment, J. Symb. Logic (to appear).

Er [1976] Ershov,Yu.L., Model C of partial continuous functionals, in: <u>Logic Colloquium 76</u>, Gandy, Hyland (Eds), North-Holland, 1977.

Kle [1959b] Kleene,S., Countable Functionals, in <u>Constructivity in Mathematics</u>, Heyting (Ed), North-Holland 1959.

Kre [1959] Kreisel,G., Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types, in: <u>Constructivity in Mathematics</u>, Heyting (Ed), North-Holland, 1959.

Lo [1982a] Longo,G., Set-theoretical models of lambda-Calculus; theories, expansions, isomorphisms, Annals Math. Logic (to appear).

Lo [1982b] Longo,G., Hereditary Partial Effective Functionals in any finite type, Preliminary note, Forshungsinstitut f. Math. EHT Zürich.

MS [1955] Myhill,J., Shepederson,C., Effective operations on partial recursive functions, Zeit. Math. Logik, 1, 310-317.

Ro [1967] Rogers,H., <u>Theory of Recursive Functions and Effective Computability</u>, Mc Graw-Hill, New York, 1967.

Scott [1981] Scott,D., <u>Lectures on a Mathematical Theory of Computation</u>. Oxford University Computing Laboratory, Technical Monogragh PRG-19, 1981.

Troelstra [1973] Troelstra,A.S., <u>Mathematical investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis</u> LNM 344, Springer-Verlag.