

G. Longo, E. Moggi

Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*  
Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28  
aprile 1984.

Disponibile in rete su <http://www.aialogica.it>

Si introducono i concetti di enumerazione principale e relativa (§2).

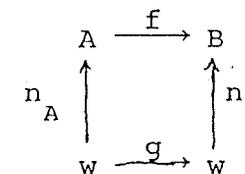
Essi permettono di dare una caratterizzazione elementare della struttura di Ershov (§1), per la Ricorsività nei tipi superiori simile alla definizione dei funzionali Banach-Mazur ([Ro 67]).

§1 Richiami ([Er 75,76];  $w =$  insieme dei numeri naturali)

1.1 Def. (EN: categoria delle enumerazioni)

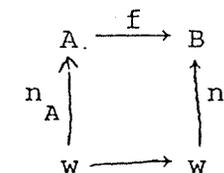
i)  $\underline{A} = (A, n_A) \in EN$  (è un insieme numerato)  
sse  $n_A : w \rightarrow A$  è surgettiva;

ii)  $f \in EN(\underline{A}, \underline{B})$  (è un morfismo) sse  $\exists g \in R$  (tot. ric.)



iii)  $f \in EN_p(\underline{A}, \underline{B})$  (è un morfismo parziale)

sse  $\exists g \in PR$  (parz. ric.)



1.2 Def. i)  $\underline{A}$  è precompleto sse

$$\forall f \in EN_p(\underline{w}, \underline{A}) \exists g \in EN(\underline{w}, \underline{A}) f = g|_{\text{dom } f};$$

ii)  $\underline{A}$  è completo sse

$$\exists a \in A \forall f \in EN_p(\underline{w}, \underline{A}) \exists g \in EN(\underline{w}, \underline{A}) g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in \text{dom } f \\ a & \text{altr.} \end{cases}$$

La nozione di precompletezza è legata ad un analogo del II Teor. di Ricorsione.

1.3 Prop.  $\underline{A}$  è precompleto sse

$$\forall f \in EN(\underline{w}, \underline{A}) \exists m \in w f(m) = n_A(m).$$

EN non è cartesianamente chiusa (CCC), tuttavia è cartesiana, perciò ha senso parlare di rappresentazioni dei morfismi. Inoltre esiste una sotto-CCC di EN, la categoria degli  $f_0$ -spazi costruttivi ed r.e. completi; in particolare risulta definita la seguente struttura di tipi:

1.4 Def. ( $E^K$ : struttura di Ershov)

$$E_o^K = w;$$

$$E_{\sigma \rightarrow o}^K = \text{rappresentazione di } EN_p(-x E_{\sigma}^K, \underline{w});$$

$$E_{\sigma \rightarrow \tau}^K = \text{rappresentazione di } EN(-x E_{\sigma}^K, E_{\tau}^K) (\tau \neq 0).$$

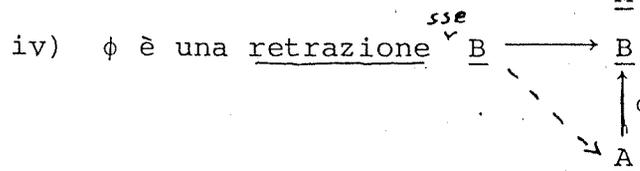
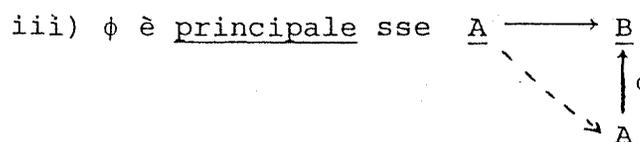
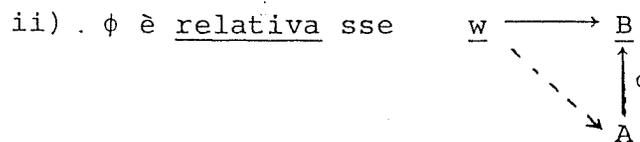
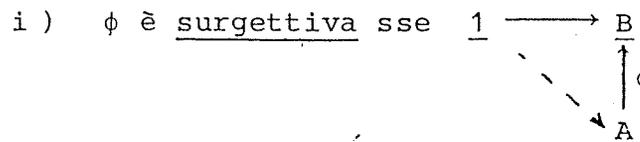
$E^K$  è stata correlata con gli HEO e i funzionali numerabili di Kleene-Kreisel.

§2 Una caratterizzazione elementare di  $E^K$ .

Dati due insiemi numerati  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  vi sono vari modi di definire una enumerazione di  $\underline{B}$  rispetto ad  $\underline{A}$ :

(Notazione: nei diagrammi:  $\rightarrow$  per ogni,  $--\rightarrow$  esiste)

2.1 Def. Sia  $\phi \in EN(\underline{A}, \underline{B})$ :



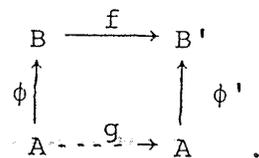
Fra queste quattro nozioni sussistono le seguenti relazioni:



Diamo alcune proprietà delle enumerazioni relative e principali:

2.2 Prop. Sia  $\phi \in EN(\underline{A}, \underline{B})$  relativa e  $\phi' \in EN(\underline{A}, \underline{B}')$  principale, allora

$f \in EN(\underline{B}, \underline{B}')$  sse  $\exists g \in EN(\underline{A}, \underline{A})$



In altre parole i morfismi non cambiano se si enumera un oggetto  $\underline{B}$  di EN, invece che non  $n_B$ , con una enum. relativa principale di  $\underline{B}$  rispetto ad  $\underline{A}$ .

2.3 Prop. Se esiste una enum. relativa di  $\underline{B}$  rispetto ad  $\underline{A}$ , allora  $A: (pre)completo \Rightarrow B (pre)completo$ .

2.4 Prop. Se  $f, g \in EN(\underline{A}, \underline{B})$  sono principali, allora  $f$  è relativa (una retrazione) sse  $g$  lo è.

2.5 Lemma. Se  $\underline{w} \triangleleft_p \underline{A}$  e  $\underline{B}$  è completo, allora esiste una enum. relativa da  $\underline{A}$  a  $\underline{B}$ .

2.6 Lemma. Se  $\underline{A} \times \underline{A} \triangleleft \underline{A}$  ed esiste una enum. surgettiva da  $\underline{A}$  a  $\underline{B}^{\underline{A}}$  (= rappresentazione di  $EN(-x \underline{A}, \underline{B})$ ), allora esiste una enum. principale da  $\underline{A}$  a  $\underline{B}$ .

Sulla base dei lemmi precedenti e con semplici considerazioni su  $E^K$  si dimostra:

2.7 Teor.  $\forall \sigma E_{\sigma}^K \times E_{\sigma}^K \triangleleft E_{\sigma}^K$  e

$\forall \sigma, \tau \neq 0 \exists \phi_{\sigma, \tau} \in EN(E_{\sigma}^K, E_{\tau}^K)$  relativa principale.

Una codifica effettiva delle coppie per  $E_{\sigma}^K$  è un morfismo  $\langle, \rangle \in EN(E_{\sigma}^K \times E_{\sigma}^K, E_{\sigma}^K)$  t.c.  $\exists p_1, p_2 \in EN(E_{\sigma}^K, E_{\sigma}^K)$   $(p_1 \Delta p_2) \circ \langle, \rangle = id$ .

Volendo evitare ogni riferimento ad EN, possiamo de-

finire:

2.8 Def.  $\langle, \rangle : A \times A \rightarrow A$  è una codifica accettabile rispetto a  $C (\subseteq A \rightarrow A)$  sse

- 1)  $\exists p_1, p_2 \in C \forall x_1, x_2 \in A p_i(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_i$
- 2)  $\forall f, g \in C \lambda x. \langle fx, gx \rangle \in C$ .

Si osservi che  $\langle, \rangle$  è una codifica effettiva per  $E_{\sigma}^K$  sse è accettabile rispetto a  $E_{\sigma \rightarrow \sigma}^K$ .

Grazie a 2.7 e 2.2, possiamo caratterizzare elementarmente  $E^K$  ristretta ai tipi interi ( $n+1 = n \rightarrow n$ ):

2.9 Corr. Sia  $\langle, \rangle$  una codifica accettabile di  $E_n^K$  rispetto ad  $E_{n+1}^K$ .

Allora

$$F \in E_{n+2}^K \iff \forall f \in E_{n+1}^K \exists g \in E_{n+1}^K \forall x \in E_n^K$$

$$F(\lambda y. f(\langle x, y \rangle)) = \lambda y. g(\langle x, y \rangle).$$

Osservazione: le enumerazioni  $\phi_{\sigma, \tau}$  in 2.7 sono in realtà retrazioni. Infatti (si usi anche 2.4):

$$E_{\sigma \rightarrow \tau}^K < E_{\sigma \rightarrow \sigma}^K < E_{\sigma' \rightarrow \tau'}^K$$

[Er 75] Ershov Yu. L., "Theoric der Numerierungen II", ZML.

[Er 76] Ershov Yu. L., "Model  $\mathcal{M}$  of partial continuous functionals", Logic Colloquium 76 (Gandy, Hyland eds.).

- [Lo 82] Longo G. "Hereditary Partial Effective Functionals in any finite type", Forschungsinstitut f. Math. ETH Zürich.
- [LM 83] Longo G., Moggi E., "The Hereditary Partial Effective Functionals and Recursion Theory in higher types", Nota Scientifica D.I. Università di Pisa, JSL (pross. pubbl.).
- [Ro 67] Rogers H., "Theory of recursive functions and effective computability", Mc Graw-Hill.