Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

STRUTTURE DI TIPI ED ENUMERAZIONI

G. Longo, E. Moggi

Si introducono i concetti di enumerazione principale e relativa (§2).

Essi permettono di dare una caratterizzazione elementare della struttura di Ershov (§1), per la Ricorsività nei tipi superiori simile alla definizione dei funzionali Banach-Mazur ([Ro 67]).

§1 Richiami ([Er 75,76]; w = insieme dei numeri naturali)

1.1 Def. (EN: categoria delle enumerazioni)

i) $\underline{A} = (A, n_A) \in EN$ (è un insieme numerato) sse $n_A : w \to A$ è surgettiva;

ii) $f \in EN(\underline{A},\underline{B})$ (è un morfismo) sse $\exists g \in R$ (tot. ric.)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ w \arrow[u, "n_A"] \arrow[r, "g"] & w \arrow[u, "n_B"'] \end{tikzcd}$$

iii) $f \in EN_p(\underline{A},\underline{B})$ (è un morfismo parziale) sse $\exists g \in PR$ (parz. ric.)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ w \arrow[u, "n_A"] \arrow[r] & w \arrow[u, "n_B"'] \end{tikzcd}$$

Dip. Informatica, Università di Pisa.

1.2 Def. i) $\underline{A}$ è precompleto sse

$$\forall f \in EN_p(\underline{w},\underline{A})\ \exists g \in EN(\underline{w},\underline{A})\ f = g|_{\mathrm{dom}\, f};$$

ii) $\underline{A}$ è completo sse

$$\exists a \in A\ \forall f \in EN_p(\underline{w},\underline{A})\ \exists g \in EN(\underline{w},\underline{A})\ g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in \mathrm{dom}\, f \\ a & \text{altr.} \end{cases}$$

La nozione di precompletezza è legata ad un analogo del II Teor. di Ricorsione.

1.3 Prop. $\underline{A}$ è precompleto sse

$$\forall f \in EN(\underline{w},\underline{A})\ \exists m \in w\ f(m) = n_A(m).$$

EN non è cartesianamente chiusa (CCC), tuttavia è cartesiana, perciò ha senso parlare di rappresentazioni dei morfismi. Inoltre esiste una sotto-CCC di EN, la categoria degli f_o-spazi costruttivi ed r.e. completi; in particolare risulta definita la seguente struttura di tipi:

1.4 Def. (E^K: struttura di Ershov)

$$E^K_o = w;$$

$$E^K_{\sigma\to o} = \text{rappresentazione di } EN_p(-x\ E^K_\sigma,\underline{w});$$

$$E^K_{\sigma\to\tau} = \text{rappresentazione di } EN(-x\ E^K_\sigma,E^K_\tau)\quad (\tau \neq 0).$$

E^K è stata correlata con gli HEO e i funzionali numerabili di Kleene-Kreisel.

§2 Una caratterizzazione elementare di E^K.

Dati due insiemi numerati $\underline{A}$ e $\underline{B}$ vi sono vari modi di definire una enumerazione di $\underline{B}$ rispetto ad $\underline{A}$: (Notazione: nei diagrammi: $\longrightarrow$ per ogni, $\dashrightarrow$ esiste)

2.1 Def. Sia $\phi \in EN(\underline{A},\underline{B})$:

i) ϕ è surgettiva sse
$$\begin{tikzcd} \underline{1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{B} \\ & \underline{A} \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

ii) ϕ è relativa sse
$$\begin{tikzcd} \underline{w} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{B} \\ & \underline{A} \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

iii) ϕ è principale sse
$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{B} \\ & \underline{A} \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

iv) ϕ è una retrazione sse
$$\begin{tikzcd} \underline{B} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{B} \\ & \underline{A} \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Fra queste quattro nozioni sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \text{princ} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{retr.} \Rightarrow \text{princ + rel} \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & & \text{surg.} \\ & & \text{rel} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Diamo alcune proprietà delle enumerazioni relative e principali:

2.2 Prop. Sia $\phi \in EN(\underline{A},\underline{B})$ relativa e $\phi' \in EN(\underline{A},\underline{B}')$ principale, allora

$f \in EN(\underline{B},\underline{B}')$ sse $\exists g \in EN(\underline{A},\underline{A})$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, dashed, "g"] & A \arrow[u, "\phi'"'] \end{tikzcd}$$

In altre parole i morfismi non cambiano se si enumera un oggetto $\underline{B}$ di EN, invece che non n_B, con una enum. relativa principale di $\underline{B}$ rispetto ad $\underline{A}$.

2.3 Prop. Se esiste una enum. relativa di $\underline{B}$ rispetto ad $\underline{A}$, allora A (pre)completo $\Rightarrow$ B (pre)completo.

2.4 Prop. Se $f,g \in EN(\underline{A},\underline{B})$ sono principali, allora f è relativa (una retrazione) sse g lo è.

2.5 Lemma. Se $\underline{w} \lhd_p \underline{A}$ e $\underline{B}$ è completo, allora esiste une enum. relativa da $\underline{A}$ a $\underline{B}$.

2.6 Lemma. Se $\underline{A} \times \underline{A} \lhd \underline{A}$ ed esiste una enum. surgettiva da $\underline{A}$ a $\underline{B}^{\underline{A}}$ (= rappresentazione di $EN(-\times \underline{A},\underline{B})$), allora esiste una enum. principale da $\underline{A}$ a $\underline{B}$.

Sulla base dei lemmi precedenti e con semplici considerazioni su E^K si dimostra:

2.7 Teor. $\forall\sigma\ E^K_\sigma \times E^K_\sigma \lhd E^K_\sigma$ e

$\forall\sigma,\tau \neq 0\ \exists\phi_{\sigma,\tau} \in EN(E^K_\sigma,E^K_\tau)$ relativa principale.

Una codifica effettiva delle coppie per E^K_σ è un morfismo $\langle,\rangle \in EN(E^K_\sigma \times E^K_\sigma, E^K_\sigma)$ t.c. $\exists p_1,p_2 \in EN(E^K_\sigma,E^K_\sigma)$ $(p_1 \Delta p_2)\circ\langle,\rangle = id$.

Volendo evitare ogni riferimento ad EN, possiamo de-

finire:

2.8 Def. $\langle,\rangle : A \times A \longrightarrow A$ è una codifica accettabile rispetto a $C(\subseteq A \longrightarrow A)$ sse

1) $\exists p_1,p_2 \in C\ \forall x_1,x_2 \in A\quad p_i(\langle x_1,x_2\rangle) = x_i$

2) $\forall f,g \in C\ \lambda x.\langle fx,gx\rangle \in C$.

Si osservi che $\langle,\rangle$ è una codifica effettiva per E^K_σ sse è accettabile rispetto a $E^K_{\sigma\to\sigma}$.

Grazie a 2.7 e 2.2, possiamo caratterizzare elementarmente E^K ristretta ai tipi interi $(n+1 = n \to n)$:

2.9 Corr. Sia $\langle,\rangle$ una codifica accettabile di E^K_n rispetto ad E^K_{n+1}.

Allora

$$F \in E^K_{n+2} \iff \forall f \in E^K_{n+1}\ \exists g \in E^K_{n+1}\ \forall x \in E^K_n$$
$$F(\lambda y.f(\langle x,y\rangle)) = \lambda y.g(\langle x,y\rangle).$$

Osservazione: le enumerazioni $\phi_{\sigma,\tau}$ in 2.7 sono in realtà retrazioni. Infatti (si usi anche 2.4):

$E^K_{\sigma\to\tau} < E^K_{o\to o} < E^K_{\sigma'\to\tau'}$.

[Er 75] Ershov Yu. L., "Theoric der Numerierungen II", ZML.

[Er 76] Ershov Yu. L., "Model $\mathbb{C}$ of partial continuous functionals", Logic Colloquium 76 (Gandy, Hyland eds.).

[Lo 82] Longo G. "Hereditary Partial Effective Functionals in any finite type", Forschungsinstitut f. Math. ETH Zürich.

[LM 83] Longo G., Moggi E., "The Hereditary Partial Effective Functionals and Recursion Theory in higher types", Nota Scientifica D.I. Università di Pisa, JSL (pross. pubbl.).

[Ro 67] Rogers H., "Theory of recursive functions and effective computability", Mc Graw-Hill.