Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

REGOLE E PRINCIPI DI INDUZIONE RISTRETTI RELATIVI A PRA

Franco Parlamento, Torino

In questa nota analizziamo la forza relativa di varie estensioni dell'Aritmetica Primitiva Ricorsiva (PRA) ottenute con l'aggiunta di regole e principi di induzione in cui la complessità delle formule coinvolte è limitata, stabilendo le relazioni che vi sono fra tali regole e principi ed i principi di riflessione ristretti per PRA.

PRA è qui inteso come sistema formalizzato all'interno di un calcolo di sequenti per il calcolo dei predicati con identità; in particolare PRA contiene la regola di induzione (IR) formulata come segue:

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta, A(S(x))}{\Gamma, A(0) \vdash \Delta, A(t)}$$

dove Γ e Δ sono insiemi finiti di formule, A è Π_0 , t è un termine qualsiasi e x non è libera in t, nè in Γ , nè in Δ .

Sia IR_n^{Π} la regola

$$\frac{\vdash A(0) \qquad \vdash A(x) \rightarrow A(S(x))}{\vdash \forall x\, A(x)}$$

dove A è Π_n ;

sia Π_n-IR la regola

$$\frac{A(x) \vdash A(S(x))}{A(0) \vdash \forall x A(x)}$$

dove A è Π_n; infine sia Π_n-Ind lo schema: $\{Ind(A) : A\ \Pi_n\}$ dove Ind(A) è la formula $A(0) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow A(S(y))) \rightarrow \forall x A(x)$.

Il principio di riflessione uniforme per Π_n formule per PRA $\{\forall x Pr(\ulcorner A\dot{x}\urcorner) \rightarrow \forall x A(x) : A\ \Pi_n\}$ può essere espresso, utilizzando una definizione di verità per Π_n enunciati, mediante un Π_n enunciato $RF_n^{\Pi}(0)$; sia poi $RF_n^{\Pi}(k+1)$ un Π_n enunciato che esprime la Π_n riflessione uniforme di PRA + $RF_n^{\Pi}(k)$.

Mentre per n=0, PRA + IR_n^{Π}, PRA + Π_n-IR e PRA + Π_n-Ind risultano equivalenti a PRA e conservative sul calcolo equazionale per l'Aritmetica Ricorsiva come formulato in (1), per $n > 0$ si ha:

a) PRA + Π_{n+1}-Ind è equivalente a PRA + $RF_{n+3}^{\Pi}(0)$
b) PRA + $\Pi n+1$-IR è equivalente a PRA + $\{RF_{n+2}^{\Pi}(k) : k<\omega\}$.

Poichè PRA + $RF_{n+3}^{\Pi}(0)$ risulta un'estensione propria, ma Π_{n+2} conservativa, di PRA + $\{RF_{n+2}(k) : k<\omega\}$, (questo è un caso particolare del teorema di struttura fine di Schmerl, vedi (7), che tuttavia ammette una dimostrazione molto semplificata), abbiamo quindi che PRA + Π_{n+1}-Ind è un'estensione propria ma Π_{n+2} conservativa di PRA + Π_{n+1}-IR.

D'altra parte da a) e b) si ha che, per $n > 0$, PRA + Π_{n+1}-IR è un'estensione propria di PRA + Π_n-Ind non riducibile ad alcuna estensione consistente di PRA + Π_n-Ind, ottenuta con l'aggiunta di Σ_{n+2} assiomi. Analogamente, per $n > 0$, PRA + Π_{n+1}-Ind non è riducibile ad alcuna estensione consistente di PRA + Π_n-Ind, ottenuta con l'aggiunta di Σ_{n+3} assiomi. Questo migliora il risultato di Leivant in (2).

Poichè, per (3), per ogni n, PRA + IR_n^{Π} è riducibile a PRA + $\{RF_n^{\Pi}(k) : k<\omega\}$, da b) si ha che, per $n > 0$, in PRA, IR_{n+2}^{Π} è riducibile a Π_{n+1}-IR, cosicchè, per $n > 0$, le due regole risultano equivalenti. Questo è il caso anche per n=0, in quanto IR_2^{Π} e Π_1-IR sono entrambe riducibili a PRA, (vedi (3)).

Da risultati in (6) si ottiene che la Π_{n+2} conservatività di PRA + Π_{n+1}-Ind su PRA + Π_{n+1}-IR sussiste anche per n=0; ne segue che PRA + Π_1-Ind è un'estensione Π_2 conservativa di PRA, e come tale non può provare alcuna riflessione di PRA. Così di PRA + Π_1-Ind possiamo soltanto dire che non è assiomatizzabile su PRA con Π_2 assiomi; questo in quanto PRA + Π_1-Ind è un'estensione propria di PRA, infatti Π_1-Ind non è derivabile nemmemo in PRA + $RF_2^{\Pi}(0)$, (Π_1-Ind è invece derivabile in PRA + $RF_3^{\Pi}(0)$).

Riguardo all'influenza che ha, sulla forza della regola di induzione, la complessità del contesto in cui viene applicata, abbiamo che se anche omettiamo le formule di lato in Γ e Δ nella regola di induzione IR di PRA otteniamo ancora una teoria equivalente a PRA; d'altra parte, per $n > 0$, aggiungere a Π_n-IR formule di lato Σ_{n+1} sulla sinistra e Π_{n+1} sulla destra, non ne accresce la forza, mentre aggiungere formule di complessità Π_{n+1} sulla sinistra (o Σ_{n+1} sulla destra) rende possibile derivare Π_n-Ind, quindi, in tal modo, si ottiene una teoria più forte della precedente ma Π_{n+1} conservativa rispetto a quella.

Tecnicamente tutti i precedenti risultati sono ottenuti applicando il teorema di eliminazione del taglio, che consente di eliminare da una dimostrazione in PRA tutti i tagli su formule più complesse di Π_0, combinato con l'impiego di definizioni parziali di verità.

Alcuni dei risultati esposti, ma con ogni riferimento ai principi di riflessione escluso, possono anche essere ricavati da precedenti risultati di Parsons, vedi (4), (5) e (6). Tuttavia le nostre dimostrazioni sono completamente indipendenti dal lavoro di Parsons, (che fra l'altro non tratta la regola Π_n-IR).

BIBLIOGRAFIA

(1) Goodstein R.L. Recursive Number Theory NH 1957

(2) Leivant D. The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic, JSL (48) 1983

(3) Parlamento F. Principi di riflessione e principi di induzione relativi all'Aritmetica Primitiva Ricorsiva, Congresso di Logica e Filosofia delle Scienze, San Gimignano 1983

(4) Parsons C. Proof-theoretic analysis of restricted induction schemata, JSL (36) 1971 p. 361 Abs.

(5) --------- On a number-theoretic choice schema and its relation to induction, Intuitionism and Proof Theory, NH 1970 pp. 459-473

(6) --------- On n-Quantifier Induction, JSL (37) pp. 466-482 1972.

(7) Schmerl U. A fine structure generated by reflection formulas over PRA, Logic Colloquium 78, NH '79