Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

COMPLETEZZA PER LOGICHE INTERMEDIE

S.Ghilardi-G.C.Meloni

Scopo di questo lavoro è lo studio della completezza rispetto alla semantica kripkiana di quelle logiche proposizionali che si situano fra la logica intuizionista e la logica classica:a differenza delle costruzioni usualmente impiegate per questo tipo di problemi,si utilizzeranno qui strutture"senza punti" con le costruzioni geometriche ed algebriche relative (topologie di Grothendieck,locali,ecc.).
Più specificamente il discorso si articolerà nei seguenti momenti:

a)considerazione invariante della sintassi;

b)costruzione di un modello "senza punti" che in una metateoria classica con assioma della scelta risulti isomorfo all'usuale modello di Stone-Kripke ottenuto con i filtri primi;

c)studio,in metateoria intuizionista,di alcune proprietà fondamentali del modello così individuato ("lemmi di valutazione");

d)dimostrazione del teorema di completezza per una classe infinita di logiche intermedie.

Si potrebbe inoltre mostrare che il metodo così individuato si applica anche a logiche di tipo modale.

§1_ Per la terminologia e i concetti impiegati, si veda [1], o meglio [2]. In particolare, fissata un'algebra di Heyting H, se $S \subseteq \mathcal{F}(H)$ (dove $\mathcal{F}(H)$ è il reticolo opposto dei filtri di H) e I è un ideale di H, conveniamo di scrivere $I \in S$, qualora per ogni $F \in S$ si abbia che $F \sqcap I$ (ossia esiste un x che sta sia in F che in I).
Si ottengono allora le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE_ Siano C un crivello del preordine $\langle \mathcal{F}(H), \supseteq \rangle$ e F un filtro di H; ponendo:
CcpF sse $C \leq v_F$ e per ogni ideale $I \in C$, $F \sqcap I$,
si ottiene una topologia di Grothendieck.

PROPOSIZIONE_ Esiste un morfismo iniettivo fra H e il locale dei crivelli chiusi $\mathcal{C}^{\sim}$ associato alla topologia di Grothendieck di cui alla proposizione precedente. Usando una metateoria classica con assioma della scelta si dimostra inoltre che $\mathcal{C}^{\sim}$ è isomorfo all'algebra dei crivelli di filtri primi di H (ordinati da $\supseteq$).

In tutto il seguito del lavoro si utilizzerà quindi $\mathcal{C}^{\sim}$ in luogo del modello di Kripke canonico, grazie al risultato di isomorfismo ottenuto : ciò permetterà al contempo di rimanere in una metateoria intuizionista e di accedere ad una struttura più ricca, in quanto $\langle \mathcal{F}(H), \supseteq \rangle$ (a differenza dell'insieme dei filtri primi), è un reticolo ed ha definite al suo interno le operazioni di estremo superiore (l'intersezione) e di estremo inferiore (il filtro generato dall'unione).

§2_ Si consideri ora l'insieme delle formule ben formate su un insieme (numerabile) di generatori atomici; scriveremo $A(p_i)$ per indicare che la formula A è costruita a partire da un insieme finito di formule atomiche comprese fra $p_1, \dots, p_n$; fissata un'algebra di Heyting H, scriveremo $A(x_i)$ per intendere l'elemento di H che si ottiene sostituendo in $A(p_i)$, p_1 con $x_1, \dots$ $\dots, p_n$ con x_n ed eseguendo poi le operazioni indicate in H.
Chiameremo canoniche le formule $A(p_i)$ tali che per ogni algebra di Heyting H :

se per ogni $x_i \in H$ $A(x_i) = 1$,
allora per ogni $\mathcal{F}_i \in \mathcal{C}^{\sim}$ $A(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}(H)$.

Risulterà allora che, se una logica intermedia è assiomatizzata utilizzando solo schemi provenienti da formule canoniche, essa sarà completa rispetto ad una classe di preordini (individuata mediante una condizione al secondo ordine).
Caratterizzeremo fra poco un insieme infinito di formule canoniche; per far ciò occorrerà "trovare un pon-

te" fra le valutazioni delle formule in H e le valutazioni delle formule in $\mathcal{C}^{\sim}$: proprio questo è reso possibile dall'analisi fatta "senza i punti".

DEFINIZIONE_ Se F è un filtro e I un ideale (di un'algebra di Heyting H) con $F \Rightarrow I$ indichiamo l'ideale $\{x \mid \exists f\in F, i\in I \text{ t.c. } x\leq f\to i\}$ e con $I\Rightarrow F$ il filtro $\{x \mid \exists f\in F, i\in I \text{ t.c. } i\to f\leq x\}$.

DEFINIZIONE_ Siano $A(p_i)$ una formula qualsiasi, F_i, I_i dei filtri, rispettivamente ideali; definiamo ora induttivamente l'ideale $A(\underline{F}_i,I_i)$ e il filtro $A(\underline{I}_i,F_i)$:

a) se $A(p_i) = p_k$ per $p_k\in\{p_1,\dots,p_n\}$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = I_k \quad \text{e} \quad A(\underline{I}_i,F_i) = F_k ;$$

b) se $A(p_i) = 0$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = [0]_I \quad \text{e} \quad A(\underline{I}_i,F_i) = [0]_F$$

(dove $[0]_I$ è l'ideale minimo e $[0]_F$ il filtro massimo);

c) se $A(p_i) = 1$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = [1]_I \quad \text{e} \quad A(\underline{I}_i,F_i) = [1]_F$$

(dove $[1]_I$ è l'ideale massimo e $[1]_F$ il filtro minimo);

d) se $A(p_i) = A_1(p_i)\wedge A_2(p_i)$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = A_1(\underline{F}_i,I_i)\cap A_2(\underline{F}_i,I_i)$$
$$A(\underline{I}_i,F_i) = A_1(\underline{I}_i,F_i)\,\bar{\cup}\,A_2(\underline{I}_i,F_i)$$

($\bar{\cup}$ denota il filtro generato dall'unione);

e) se $A(p_i) = A_1(p_i)\vee A_2(p_i)$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = A_1(\underline{F}_i,I_i)\,\bar{\cup}\,A_2(\underline{F}_i,I_i)$$
$$A(\underline{I}_i,F_i) = A_1(\underline{I}_i,F_i)\cap A_2(\underline{I}_i,F_i)$$

(qui $\bar{\cup}$ denota ovviamente l'ideale generato dall'unione);

f) se $A(p_i) = A_1(p_i)\to A_2(p_i)$, allora:

$$A(\underline{F}_i,I_i) = A_1(\underline{I}_i,F_i)\Rightarrow A_2(\underline{F}_i,I_i)$$
$$A(\underline{I}_i,F_i) = A_1(\underline{F}_i,I_i)\Rightarrow A_2(\underline{I}_i,F_i) \quad .$$

DEFINIZIONE_ Una singola occorrenza di una variabile p_i in una formula $A(p_i)$ è detta positiva (negativa) secondo la seguente definizione induttiva:

a) p_i è positiva in p_i;

b) se p_i è positiva (negativa) in A, allora p_i è positiva (negativa) in $A\wedge B$, $A\vee B$, $B\to A$;

c) se p_i è positiva (negativa) in A, allora p_i è negativa (positiva) in $A\to B$.

Una variabile è detta positiva (negativa) in una formula sse tutte le sue occorrenze lo sono.

Scriveremo talvolta una formula A con $A(\underline{p}_i,p_i)$ per indicare che p_i può occorrere sia positivamente che negativamente in A; con $A(\underline{x}_i,y_i)$ indicheremo invece l'elemento di H che si ottiene sostituendo le occorrenze negative di p_i con x_i e le occorrenze positive di p_i con y_i.

§3_ Poste queste convenzioni, abbiamo i fondamentali "lemmi di valutazione" che analizzano l'interpretazione di una formula in $\tilde{\mathcal{C}}$ nei termini delle sue interpretazioni "miste" nei filtri/ideali e queste ultime nei termini delle sue interpretazioni in H:

LEMMA_ Se F_i, I_i sono filtri, rispettivamente ideali, $A(\underline{p}_i, p_i)$ una formula, risulta che per ogni $x \in H$:

a) $x \in A(\underline{F}_i, I_i)$ sse $\exists f_i \in F_i, j_i \in I_i$ t.c. $x \leq A(\underline{f}_i, j_i)$;

b) $x \in A(\underline{I}_i, F_i)$ sse $\exists j_i \in I_i, f_i \in F_i$ t.c. $A(\underline{j}_i, f_i) \leq x$.

LEMMA_ Se $A(\underline{p}_i, p_i)$ è una formula qualsiasi, $\mathcal{F}_i \in \tilde{\mathcal{C}}$, $F_i, I_i \in \mathcal{F}_i$, allora:

a) $A(\underline{F}_i, I_i) \in A(\underline{\mathcal{F}}_i, \mathcal{F}_i)$;

b) $A(\underline{I}_i, F_i) \in A(\underline{\mathcal{F}}_i, \mathcal{F}_i)$.

Ne segue che per ogni filtro F :

c) se $F \in A(\underline{\mathcal{F}}_i, \mathcal{F}_i)$, allora per ogni $F_i, I_i \in \mathcal{F}_i$ $F \subseteq A(\underline{F}_i, I_i)$.

Il lato inverso del precedente lemma al punto c) non è valido per tutte le formule (altrimenti tutte le formule sarebbero canoniche), ma solo per alcune di esse:

DEFINIZIONE_ Diciamo <u>standard</u> le formule che non presentino nessuna implicazione in antecedenti di implicazioni e <u>quasi-standard</u> le formule che non abbiano implicazioni, occorrenti in antecedenti di implicazioni, che non siano del tipo $\neg p_i$ o $\neg\neg p_i$, per p_i atomica.

Si arriva così al cruciale lemma:

LEMMA_ Se $A(\underline{p}_i, p_i)$ è una formula quasi-standard e $\mathcal{F}_i \in \tilde{\mathcal{C}}$, allora per ogni filtro F :

se per ogni $I_i, F_i \in \mathcal{F}_i$ $F \subseteq A(\underline{F}_i, I_i)$,

allora $F \in A(\underline{\mathcal{F}}_i, \mathcal{F}_i)$.

§4_ Dai dati ricavati, si ottiene subito che le formule quasi-standard sono canoniche; tuttavia il risultato può essere migliorato ancora nel modo seguente:

DEFINIZIONE_ Sia $A(\underline{p}_i, p_i)$ una formula qualsiasi; diciamo <u>sottoformula critica</u> di $A(\underline{p}_i, p_i)$ una sottoformula che soddisfi le seguenti condizioni:

a) sia del tipo $B \to C$;

b) occorra in un antecedente di implicazione;

c) non sia del tipo $\neg p_i$ $\neg\neg p_i$, per p_i atomica.

Una sottoformula critica sarà detta <u>massimale</u> sse ha almeno un'occorrenza in A che non sia all'interno di altre sottoformule critiche di A.

TEOREMA_ Sono canoniche le formule tali che ogni variabile che in esse compare sia positiva in tutte le sottoformule critiche massimali oppure negativa in tutte le sottoformule critiche massimali.

Tra le logiche intermedie note che rientrano nella condizione del teorema, citiamo $\mathcal{A}_n$, Π_n, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{S}_n$, weak TND, KP di [3] e KP_n di [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] S.GHILARDI-G.C.MELONI "Modelli con coperture per la logica proposizionale intuizionista e locale" in corso di stampa negli "Atti degli incontri di Logica Matematica"1983,Siena;

[2] S.GHILARDI-G.C.MELONI "Sulle relazioni di copertura nel modello dei filtri di una teoria proposizionale intuizionista" in corso di stampa sui "Rendiconti dell'Istituto Lombardo" ;

[3] E.CASARI "Intermediate Logics" in "Atti degli incontri..."1982,Siena ;

[4] S.GHILARDI-G.C.MELONI-C.PIERSANTINI "Alcuni risultati sulle logiche intermedie proposizionali" in corso di stampa in "Atti...",Siena1984.