Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

SULLA NON ASSIOMATIZZABILITA' FINITA DI P

Maurizio Negri

1. L'aritmetica non è finitamente assiomatizzabile in un duplice senso: non esiste un insieme finito di formule che dia tutti i teoremi di P (Ryll-Nardzewski 1953), non esiste un insieme di formule vere in ω di complessità limitata che dia tutti i teoremi di P (Rabin 1961). Nel seguito dimostreremo che è possibile generalizzare il secondo asserto sostituendo l'espressione "vere in ω" con "vere in un dato modello di P". L'interesse di ciò non sta tanto nel risultato, che è ottenibile sotto una forma ancora più generale sfruttando metodi di teoria della dimostrazione (si veda Montague 1961 e Kreisel-Levy 1968), ma nel metodo di dimostrazione utilizzato, che è diverso da quello di Rabin ~~ed~~ è strettamente imparentato a quello seguito nella dimostrazione del teorema di incompletezza di Gödel contenuta in Robinson 1963. Lo strumento fondamentale su cui è fondata la dimostrazione è il seguente Lemma di Robinson-Friedman: Se $\mathcal{A}$ è non standard, $a \in |\mathcal{A}|$, $\Gamma(x,y)$ è un insieme ricorsivo di formule che ammette una relazione di soddisfazione, $\Gamma(a,y)$ è un tipo su $\mathcal{A}$, allora $\Gamma(a,y)$ è soddisfatto in $\mathcal{A}$. (Si veda Smorynski 1981, th.1.1.) Come conseguenza di questo lemma, ogni modello non standard di P possiede un certo grado di saturazione: in particolare tutti i tipi di complessità limitata, purchè ricorsivi, risultano soddisfatti. E' signi-

ficativo che da questo fatto, che è conseguenza dell'overspill e della possibilità di codificare insiemi infiniti di numeri naturali con codici non standard, risultino sia il teorema di incompletezza sia la non assiomatizzabilità finita di P .

2. Sia L il linguaggio di P . Se $\mathcal{A}$ denota una struttura $|\mathcal{A}|$ ne è il dominio. Se $\Gamma(x,y)$ è un insieme di formule, $a \in |\mathcal{A}|$, diremo che $\Gamma(a,y)$ è un tipo su $\mathcal{A}$ se è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{A}$. $\Gamma(x,y)$ è ricorsivo se considerato come insieme di numeri di Gödel lo è. Una relazione di soddisfazione per Γ è una formula $S(z,x,y)$ di L tale che, per ogni $A(x,y) \in \Gamma$, $P \vdash S(\ulcorner A(x,y) \urcorner, x,y) \leftrightarrow A(x,y)$. Se S è una relazione di soddisfazione per Γ , diciamo che Γ ammette una relazione di soddisfazione. Se Γ è un qualsiasi insieme di formule, con $\exists\Gamma$ designamo l'insieme delle formule del tipo di $\exists x_1 \dots x_n\, A$ con $A \in \Gamma$. Definiamo ora una gerarchia di formule: $\exists_0$, $\forall_0$ sono le formule aperte di L ; $\exists_{n+1} = \exists\forall_n$ e $\forall_{n+1} = \forall\exists_n$. Diremo che un insieme Γ è di complessità limitata se $\Gamma \subset \bigcup\{\exists_j\}$, $j \leq i$, per qualche $i \in \omega$. E' noto che esistono predicati parziali di verità per P e che quindi ogni Γ di complessità limitata ammette una relazione di soddisfazione. Possiamo quindi sostituire nel lemma di Robinson-Friedman "che ammette una relazione di soddisfazione" con "di complessità limitata".

Sia L^s il linguaggio ottenuto aggiungendo a L i simboli per tutte le funzioni di Skolem e sia SK l'insieme di tutti gli assiomi di Skolem del tipo di $[\exists x A(y_1 \dots y_n x) \to F_{\exists x A}(y_1 \dots y_n) = \mu_x A(y_1 \dots y_n x)] \wedge [\sim \exists x A(y_1 \dots y_n x) \to F_{\exists x A}(y_1 \dots y_n) = 0]$ dove $\exists x A \in L^s$ (si veda Chang-Keisler 1973, 3.4.5). Poichè le funzioni di Skolem risultano essere definibili in P , è possibile pensare la formula $\exists x A$ posta ad indice di $F_{\exists x A}$ come una formula di P . Definiamo ora dei linguaggi di Skolem parziali $L_i = \{F_{\exists x A} : \exists x A \in \exists_i\} \cup L$ per $i \geq 1$, e definiamo in corrispondenza delle teorie di Skolem parziali SK_i coincidenti con la restrizione di SK a L_i . Intuitivamente SK_i contiene le funzioni di Skolem il cui definiens espresso in L hà al massimo complessità $\exists_{i+1}$. Se $\mathcal{A} \models P$, esiste un'unica espansione $\mathcal{A}^s$ di $\mathcal{A}$ a L^s tale che $\mathcal{A}^s \models SK$, dato che le funzioni di Skolem sono definibili in P, e in modo analogo si possono introdurre espansioni di Skolem parziali $\mathcal{A}_i$ di $\mathcal{A}$ a L_i tali che $\mathcal{A}_i \models SK_i$.

Indichiamo con $\mathcal{A}[a]$, dove $a \in |\mathcal{A}| - \omega$, il sottomodello elementare generato da $\{a\}$ in $\mathcal{A}$, cioè $\bigcap\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \prec \mathcal{A}, \{a\} \subset |\mathcal{B}|\}$ E' possibile pensare $|\mathcal{A}[a]|$ come $\{t^{A^s}(a) : t(x) \in L^s\}$ (si veda Robinson 1961). Poichè le funzioni di Skolem sono chiuse rispetto alla composizione, $\{t^{A^s}(a) : t(x) \in L^s\} = \{F^{A^s}(a) : F \in L^s\}$. Consideriamo la sottostruttura $\mathcal{B}_i$ generata da $\{a\}$ in $\mathcal{A}_i$ e sia $\mathcal{A}_i[a] = \mathcal{B}_i \upharpoonright L$.

3. Indichiamo con $\mathcal{A} \prec_i \mathcal{B}$ la relazione $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ristretta a formule di $\exists_i$.

Teorema 1. a) $\mathcal{A}_i[a] \prec_i \mathcal{A}_{i+1}[a]$ b) $\mathcal{A}_i[a] \prec \mathcal{A}[a]$

a) Vale $\mathcal{A}_i[a] \prec_i \mathcal{A}_{i+1}[a]$: infatti $|\mathcal{B}_i| \subset |\mathcal{B}_{i+1}|$ perchè $L_i \subset L_{i+1}$ e per definizione $\mathcal{A}_i[a] \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_{i+1}[a] \subset \mathcal{A}$. Sia ora $\exists x A(y_1 \dots y_n x) \in \exists_i$, $a_1 \dots a_n \in |\mathcal{A}_i[a]|$, $\mathcal{A}_{i+1}[a] \models \exists x A(a_1 \dots a_n x)$. Sia F la funzione di Skolem associata a $\exists x A$, allora $\mathcal{B}_{i+1} \models A(a_1 \dots a_n F(a_1 \dots a_n))$ e $\mathcal{B}_i \models A(a_1 \dots a_n F a_1 \dots a_n)$ perchè $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{i+1} \restriction L_i$. Allora $\mathcal{B}_i \restriction L \models \exists x A(a_1 \dots a_n x)$.

b) Siano $\exists x A$ e $a_1 \dots a_n$ come nel caso precedente e sia $\mathcal{A}[a] \models \exists x A(a_1 \dots a_n x)$. Esiste allora una $F \in L_i$ tale che $\mathcal{B}_i \models A(a_1 \dots a_n F(a_1 \dots a_n))$ e allora, essendo $\mathcal{B} \restriction L_i = A_i[a]$ vale $\mathcal{A}_i[a] \models \exists x A(a_1 \dots a_n x)$.

Teorema 2. Per ogni $i \in \omega$, $\mathcal{A}_i[a] \not\models P$

Supponiamo che vi sia un $i \in \omega$ tale che $\mathcal{A}_i[a] \models P$. Sia $\Gamma(xy) = \{(F(x) < y)^\phi : F \in L_i\}$, dove ϕ è una traduzione di L^S in L. Tale traduzione esiste perchè le funzioni di Skolem sono definibili in P . $\Gamma(a,y)$ è un tipo su $\mathcal{A}_i[a]$ perchè è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{A}_i[a]$. $\Gamma(xy)$ ha complessità limitata perchè i definiens delle funzioni F appartenenti a L_i sono in $\exists_{i+1}$. $\Gamma(xy)$ è ovviamente un insieme ricorsivo. Allora per il lemma di Robinson-Friedman è soddisfatto in $\mathcal{A}_i[a]$. Ciò è assurdo dato che ogni elemento di $\mathcal{A}_i[a]$ è esprimibile come $F^{\mathcal{A}^s}(a)$ per qualche $F \in L_i$.

Teorema 3. Per ogni $\mathcal{A} \models P$, non esiste un insieme P' di formule chiuse di L vere in $\mathcal{A}$ di complessità limitata tale che tutti i teoremi di P siano teoremi di P' .

Supponiamo che un tale P' esista e che sia $P' \subset \exists_i$ per qualche $i \in \omega$. Allora $\mathcal{A}_i[a] \models P$, perchè $\mathcal{A} \models P$, $\mathcal{A}[a] \models P'$, $\mathcal{A}_i[a] \models P'$ (T.1). Ma P' non può dimostrare tutti i teoremi di P perchè $\mathcal{A}_i[a] \not\models P$ (T.2).

Durante gli anni '50 si realizzò la possibilità di ottenere modelli non standard di P con ultrapotenze $\mathcal{N}^\omega/D$ e si identificò il modello di Skolem con $\mathcal{N}^\omega/D \restriction \mathcal{F}$, dove $\mathcal{F}$ sono le funzioni definibili in $\mathcal{N}$. Ci si chiese se altre classi di funzioni, come le generali ricorsive o le primitive ricorsive, dessero luogo a sottostrutture di $\mathcal{N}^\omega/D$ che fossero modelli di P . La risposta, negativa, è contenuta in Fefermann-Scott-Tennenbaum 1959. Sfruttando i metodi precedenti otterremo una condizione abbastanza generale perchè $\mathcal{F}$ non dia luogo a un modello di P . Supponiamo che $\mathcal{F}$ contenga la funzione costante zero e sia chiusa rispetto a successore, somma, prodotto eseguiti punto a punto. Supponiamo che $\mathcal{F}$ contenga l'identità, perchè ciò evita il caso banale di $\mathcal{N}^\omega/D \restriction \mathcal{F} \simeq \mathcal{N}$. Diremo che F è universale per $\mathcal{F}$ se è possibile associare ad ogni $f \in \mathcal{F}$ un numero $\ulcorner f \urcorner \in \omega$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$, $n \in \omega$, $F(\ulcorner f \urcorner, n) = f(n)$.

Teorema. Se $\mathcal{F}$ ha una funzione universale definibile, $\mathcal{N}^\omega/D \restriction \mathcal{F} \not\models P$.

Per ipotesi esiste $A(xyz) \in L$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$, $n \in \omega$,

$\mathfrak{N} \models A(\ulcorner f \urcorner, n, f^{(n)})$. Sia $\mathfrak{F}(id_D) = \{f(id_D) : f \in \mathfrak{F}\}$ e poniamo $\varphi(f_D) = f(id_D)$. φ è un isomorfismo di $\mathfrak{N}^{\omega}/D \restriction \mathfrak{F}$ su $\mathfrak{F}(id_D)$. Basta allora dimostrare che $\mathfrak{F}(id_D) \not\models P$. Supponiamo il contrario e sia $\Gamma(x,y) = \{(F(x) \neq y)^{\phi} : F \in L_n\}$, allora $\Gamma(id_D, y)$ è un tipo ricorsivo e limitato su $\mathfrak{F}(id_D)$. (Poichè $\mathfrak{F}$ contiene l'identità, $\mathfrak{F}(id_D)$ contiene l'elemento non standard id_D.) Ma $\Gamma(id_D, y)$ non può essere realizzato in $\mathfrak{F}(id_D)$ perchè, per ogni $a \in |\mathfrak{F}(id_D)|$, vale $A(\ulcorner f \urcorner, id_D, a)$ per qualche $f \in \mathfrak{F}$, ed è quindi esprimibile come valore $F(id_D)$ di un'opportuna funzione di complessità n.

Bibliografia

Chang-Keisler Model Theory 1973

Kreisel-Levy Reflection principles, Zeit. Math. Log. 1968

Fefermann-Scott-Tennenbaum Models of arithmetic through function rings, Notices A.M.S. 1959

Montague R. Semantic closure and non finite axiomatizability in Infinitistic Methods 1961

Robinson A. Model theory and non standard arithmetic, 1961
On languages which are based on non standard arithmetic, 1963, in Selected Papers.

Ryll-Nardzewski C. The role of axiom of induction in arithmetic, F.M. 1953

Smoryński C. Recursively saturated models of arithmetic, JSL 1981

Rabin M. O. Non standard models and the indipendence of the induction axiom, in Essays on the Foundations of Mathematics, 1961