Estratto da

C. Bernardi e P. Pagli (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 2, Siena 5-8 gennaio 1983, 6-9 aprile 1983, 9-12 gennaio 1984, 25-28 aprile 1984.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

DOMINI E CATEGORIE DOMINICALI

di Giuseppe ROSOLINI

Le categorie dominicali (= dominical categories) sono state introdotte da Heller in [He] e sono state studiate da Di Paola e Heller come approccio algebrico alla teoria della ricorsivita'.

In questo articolo si prova un teorema di rappresentazione per le categorie dominicali e si produce un'immersione di una categoria dominicale in un opportuno topos, che dovrebbe risultare utile per successivi studi su queste categorie. Produrremo infine un esempio per quanto affermato.

1. CATEGORIE DOMINICALI E DOMINI

Richiamiamo velocemente la definizione di categoria dominicale: una categoria C si dice *p u n t a t a* se per ogni coppia di oggetti X,Y di C esiste una mappa $0:X\longrightarrow Y$ che siano fisse per composizione, cioe' $0w=0$ e $z0=0$ per ogni w e z componibili. In C una mappa f si dice *t o t a l e* se rivela le mappe 0: se $fw=0$ allora $w=0$. Le mappe totali individuano una sottocategoria C_T di C.

Una categoria C si dice *d o m i n i c a l e* se e' puntata ed esiste un funtore $\times:C\times C\longrightarrow C$ tale che, ristretto alla categoria C_T, sia un effettivo prodotto categoriale; inoltre si richiede che gli isomorfismi associativo $X\times(Y\times Z)\longrightarrow(X\times Y)\times Z$ e commutativo $X\times Y\longrightarrow Y\times X$ siano naturali su tutta C e valgano le seguenti richieste

$$w\times z=0 \quad \text{se e solo se} \quad w=0 \text{ oppure } z=0$$

$$p(w\times id)=wp,\ q(id\times w)=wq \quad \text{e} \quad (w\times w)d=dw,$$

dove p e q sono le proiezioni opportune e d e' la diagonale.

Esempi di categorie dominicali sono forniti da molte categorie di funzioni parziali della vita di tutti i giorni: gli insiemi con le funzioni parziali, l'insieme dei numeri naturali con le funzioni ricorsive parziali, gli spazi topologici con le funzioni continue definite su un aperto.

Si definisce d o m i n i o dom w di una mappa w:X—>Y l'endomorfismo p(idxw)d:X—>X. Elenchiamo alcune proprieta' di queste mappe:

(i) w o dom w = w (ii) dom(dom w) = dom w

(iii) dom(w o dom z) = dom w o dom z = dom z o dom w

(iv) dom w = id se e solo se w e' totale

(v) dom(w x z) = dom w x dom z.

2. LA CATEGORIA DEI DOMINI

Intendiamo rappresentare la categoria dominicale C come categoria di mappe parziali: a questo scopo introduciamo la categoria Dom(C) dei domini. Gli oggetti di quest'ultima sono le mappe di C della forma dom w:X—>X; un morfismo s:dom w —> dom z (con dom w dominio su X e dom z su Y) e' una mappa s:X—>Y di C tale che

dom s = dom w e dom z o s = s.

L'idea di una tale definizione e' di 'aggiungere' i domini mancanti in C e utilizzare le mappe che 'sono definite' su tutto il loro dominio ed 'assumono valori' nel codominio.

La verifica che Dom(C) sia una categoria e' del tutto algebrica, cosi come la dimostrazione della seguente

PROPOSIZIONE. La categoria Dom(C) ha prodotti finiti e ha un oggetto iniziale stretto. Inoltre ammette controimmagini dei monomorfismi della forma dom u:dom w >—> dom z (dove essere dom z o dom w = dom w !).

Dimostrazione. A beneficio del lettore volenteroso, avvertiamo che in C vale la proprieta' seguente: se pz = pw e qz = qw, allora z = w. []

Da quanto enunciato, segue che esiste la categoria PD(Dom(C)) dei morfismi parziali di Dom(C) definiti su monomorfismi della forma dom u:dom w>—>dom z. E' banale provare che PD(Dom(C)) e' dominicale. Si consideri l'assegnazione che associa ad un morfismo w:X—>Y in C il morfismo parziale di PD(Dom(C))

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{dom}\ w \arrow[dl, "\mathrm{dom}\ w"'] \arrow[dr, "w"] & \\ id_X & & id_Y \end{tikzcd} ;$$

Essa definisce un funtore dominicale I da C a PD(C) che e' pieno e fedele. Questa costruzione e' la piu' naturale possibile, nel senso che

TEOREMA. Siano D una qualunque categoria con prodotti finiti ed oggetto iniziale ed M una famiglia di monomorfismi di D chiusa per composizione e per controimmagini; sia poi PM(D) la categoria di morfismi parziali di D definiti su monomorfismi di M. Dato un qualunque funtore dominicale F:C—>PM(D), esiste un unico funtore F":Dom(C)—>D che conserva i limiti e l'oggetto iniziale ed induce un funtore P(F"):PD(Dom(C))—>PM(D) tale che F = P(F") o I.

Tralasciamo la dimostrazione lunga, ma semplice; pero' notiamo che dal teorema discende che il funtore x:CxC—>C puo' essere definito in unico modo.

3. MORFISMI DI TURING

Consideriamo ora l'immersione di Dom(C) nel topos di fasci Sh(Dom(C),J) dove J e' la topologia in cui la famiglia vuota ricopre l'oggetto iniziale (i fasci per questa topologia sono i funtori A:Dom(C)—>Set con A(0) un singoletto). L'immersione di Dom(C) in Sh(Dom(C),J) e' piena e fedele e conserva limiti ed oggetto iniziale; di conseguenza C si puo' pensare come una categoria di insiemi e mappe parziali.

Utilizziamo questa immersione per un breve studio dei morfismi di Turing, dove u:XxX—>X in C e' un morfismo d i T u r i n g se per ogni mappa v:YxX—>X esiste (non necessariamente unica!) una mappa {v}:Y—>X tale che v = u({v} x id). Notiamo in inciso che la definizione di morfismo di Turins e\` lessermente diversa da quella nota, ma il teorema che sesue dovrebbe siustificare il cambiamento!

TEOREMA. Esiste in C un morfismo di Turins u!XxX-->X se e solo se nel topos Sh(Dom(C),J) esiste una suriezione {-}!X—▶[X—>X^], dove [X—>X^] e\` l'ossetto delle funzioni parziali da X a X definite su un dominio.

BIBLIOGRAFIA

[He] A. HELLER, Dominical Categories, in corso di pubblicazione sugli Atti della Scuola di Logica, Siena, 1983.