Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

UN APPROCCIO ASTRATTO AI PRINCIPI DI LIBERA COSTRUZIONE PER INSIEMI, COPPIE, URUPLE, OPERAZIONI ED EVENTUALI ALTRI OGGETTI NELLA TEORIA QUADRO DEI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA DI DE GIORGI – FORTI

MASSIMO CLAVELLI
S.N.S., Pisa

Introduzione

L'idea dei principi di libera costruzione per oggetti che non siano insiemi è stata presa in considerazione nell'ambito del seminario sui fondamenti della matematica diretto da E.De Giorgi presso la scuola normale superiore di Pisa. Tali assiomi vengono introdotti nell'ambito della teoria quadro presentata in [1]. Questa teoria fondazionale propone infatti molti concetti primitivi, oltre all'usuale appartenenza: coppie, uruple, operazioni....

Questi nuovi assiomi si rendono necessari perchè nella teoria quadro gli assiomi di libera costruzione per insiemi non implicano analoghi assiomi relativi agli altri tipi di oggetti .

Una importante conseguenza dei principi di libera costruzione, che sono stati dimostrati relativamente consistenti in [2], è la possibilità di rappresentare in modo standard teorie matematiche (come ad esempio il λ-calcolo).

Un'idea fondamentale è di esprimere gli assiomi di libera costruzione in termini di strutture , permettendo così di enunciare in maniera unificata i principi di libera costruzione relativi ai vari tipi di oggetti. Questo sembra opportuno perchè gli assiomi di libera costruzione per coppie, uruple, operazioni... non risultano essere stati mai studiati, mentre gli analoghi assiomi per insiemi sono stati ampiamente analizzati

§1 Definizioni preliminari

In questo paragrafo e nei seguenti si fa riferimento alle notazioni e definizioni introdotte in [1] .

Definizione 1,1

Si dice *struttura di tipo finito* (di tipo $n+1, n\in\mathbb{N}$) un'operazione $f:B^1\times A^n\rightarrow\{0,1\}$ con $B\subseteq A$ classi .

Si dice *struttura di tipo $<\omega$* un'operazione $f:\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^1\times A^n\rightarrow\{0,1\}$ con $B\subseteq A$ classi .

In entrambi i casi A verrà detta *ambiente* di f e B *classe degli oggetti* di f (si scriverà $A=amb(f)$ e $B=ogg(f)$) .

Nel seguito si indicheranno le strutture con le lettere f,g , i rispettivi ambienti con A,A' , le rispettive classi degli oggetti con B,B' .

Definizione 1,2

Una g si dice *restrizione* di f alla classe $C\subseteq A=amb(f)$, se $g(x_0,\dots,x_n)=y\Leftrightarrow(f(x_0,\dots,x_n)=y\,\&\,x_0,\dots,x_n\in C)$

Risulterà in particolare: $A'=C$, $B'=B\cap C$.

Inoltre g si dirà *f-transitiva* se

$(f(x_0,x_1,\dots,x_n)=1\,\&\,x_0\in C)\Rightarrow x_1,\dots,x_n\in C$

Definizione 1,3

Un grafico funzionale iniettivo h si dice un *isomorfismo* tra f e g se h è una bigezione tra i rispettivi ambienti e $f(x_0,\dots,x_n)=y\Leftrightarrow g(h(x_0),\dots,h(x_n))=y$.

Con $h_*^*(f)$ si indicherà una qualsiasi g , tale che h è un isomorfismo tra f e g .

Definizione 1,4

Sia Ψ un grafico funzionale a valori 0,1 , f si dice *Ψ-standard* se $\forall x\in dom\, f\;(f(x)=\Psi(x))$.

f si dice *Ψ-transitiva* se

$(\Psi(x_0,x_1,\dots,x_n)\,\&\,x_0\in A)\Rightarrow(x_0\in B\,\&\,x_1,\dots,x_n\in A)$

§2 Alcuni schemi di assiomi di libera costruzione

In quanto segue $\mathcal{T}$ è un'opportuna classe di strutture e Ψ un opportuno grafico funzionale a valori 0,1 .

Assioma di $\mathcal{T}$-Ψ-universalità

Ogni $f\in\mathcal{T}$ è isomorfa a una struttura Ψ-standard e Ψ-transitiva .

Assioma di $\mathcal{T}$-Ψ-universalità superatomica

Sia data una $f\in\mathcal{T}$, tale che $amb(f)\cap\widehat{Gp}_1(\Psi)=\emptyset$, e sia C una classe contenuta in $amb(f)-ogg(f)$; allora esiste un isomorfismo h tale che le $h_*^*(f)$ siano strutture Ψ-transitive e Ψ-standard e h ristretta a C sia l'identità .

Assioma di $\mathcal{T}$-Ψ-superuniversalità

Sia data una $f\in\mathcal{T}$, tale che una restrizione di f a una classe C sia f-transitiva e sia una struttura Ψ-standard e Ψ-transitiva ; allora esiste un isomorfismo h , tale che le $h_*^*(f)$ siano strutture Ψ-standard e Ψ-transitive e h ristretta a C sia l'identità .

§3 Alcuni esempi

Definizioni 3,1

Una struttura si dice *locale* se il suo ambiente è un insieme .

Una struttura f si dice <u>estensionale</u> (debolmente) se $(f(x,z_1,\ldots,z_n)=t \Leftrightarrow f(y,z_1,\ldots,z_n)=t \,\&\, x,y \in ogg(f)) \Rightarrow x=y$

Una struttura f si dice <u>di oggetti piccoli</u> se $\forall x(\{y/f([x]\smile y)=1\} \in Ins)$

Una struttura f si dice <u>funzionale</u> se $f([x]\smile y\smile[u])=f([x]\smile z\smile[u])=1 \Rightarrow y=z$

Una struttura f si dice <u>semplice</u> se $\forall x \in ogg(f)\exists_1 y(f([x]\smile y)=1)$

Una struttura f si dice pura se $amb(f)=ogg(f)$.

<u>Assiomi di libera costruzione per insiemi</u>

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per insiemi , si può prendere come ψ il seguente:

$\psi: Ins \times V \to \{0,1\}$; $\psi(x,y)=1 \Leftrightarrow y \in x$.

Come $\mathcal{T}$ si può prendere la classe delle strutture estensionali per oggetti piccoli di tipo 1+1

<u>Assiomi di libera costruzione per coppie</u>

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per coppie , si può prendere come ψ il seguente:

$\psi:(V^2)^1 \underline{\times} V^2 \to \{0,1\}$; $\psi(x,y,z)=1 \Leftrightarrow x=(y,z)$.

Come $\mathcal{T}$ si può prendere la classe delle strutture estensionali semplici di tipo 2+1 .

<u>Assiomi di libera costruzione per uruple</u>

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per uruple , si può prendere come ψ il seguente:

$\psi: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V^n)^1 \underline{\times} V^n \to \{0,1\}$; $\psi(x_0,x_1,\ldots,x_n)=1 \Leftrightarrow x_0=(x_1,\ldots,x_n)$

Come $\mathcal{T}$ si può prendere la classe delle strutture estensionali semplici di tipo $<\omega$.

<u>Assiomi locali per insiemi,coppie,uruple</u>

Si possono ottenere degli altri principi di libera costruzione,che verranno detti locali,restringendo la

classe $\mathcal{T}$ alle strutture locali .

<u>Assiomi di libera costruzione per operazioni (intese in senso unario)</u>

Per ottenere degli assiomi di libera costruzione per operazioni , si può prendere come ψ il seguente:

$\psi: Urop^1 \underline{\times} V^2 \to \{0,1\}$; $\psi(x,y,z)=1 \Leftrightarrow x(y)=z$

Come $\mathcal{T}$ si può prendere la classe delle strutture funzionali di tipo 2+1 .

$\mathcal{T}$ può essere ristretta prendendo in considerazione solo le strutture che siano per oggetti piccoli o locali e/o pure e/o estensionali .

§4 <u>Un ulteriore sviluppo</u>

In un articolo in preparazione si enunciano e si dimostrano consistenti gli assiomi complessivi di libera costruzione che coinvolgono contemporaneamente più classi di strutture e più grafici funzionali .

Tra le applicazioni la possibilità di rappresentare in modo standard e transitivo i modelli della teoria quadro , e la possibilità di introdurre in modo più semplice gli assiomi di libera costruzione per operazioni intese in senso ario di cui in [2] .

§5 <u>BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE</u>

[1] DE GIORGI E. / FORTI M. - <u>Una teoria quadro per i fondamenti della matematica</u> Atti Accad.Naz.Lincei, Rend.Sci.Mat.Fis.Nat. (1985,in corso di pubblicazione)

[2] CLAVELLI M. - <u>I principi di libera costruzione per coppie,uruple,qualità,operazioni e funzioni nella teoria quadro dei fondamenti della matematica di De Giorgi-Forti</u> Dip. di Matematica , Pisa 1986 , quad. n°162