

Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*
Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5
aprile 1986.

Disponibile in rete su <http://www.ailalogica.it>

APPLICATION DE L'ANALYSE NON STANDARD DANS UN PROBLEME DE SEMI-CONDUCTEURS

RACHID BEBBOUCHI
Université d'Oran Es Sénia (Algérie)

1. Introduction:

A.B. Vasileva et V.G. Stelmakh [2] ont étudié le système

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon y' = x_1 - x_2 + b \\ x_1' = x_1 y - a \\ x_2' = -x_2 y + a \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(2) \quad x_1(0) = x_2(0), x_1(1) = 0, x_2(1) = b,$$

a et b étant des constantes strictement positives.

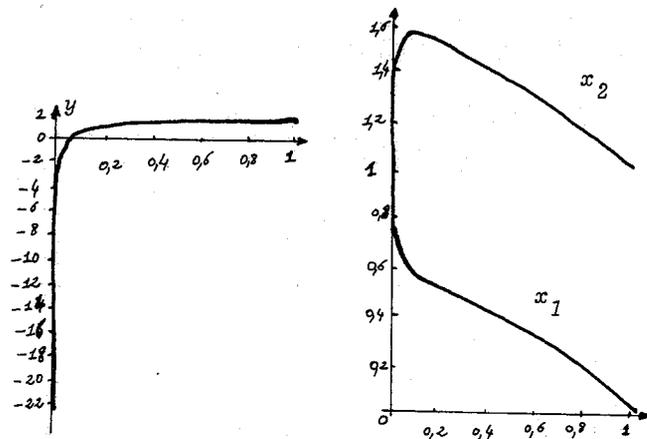
Le problème (1)-(2) prétend décrire le contact entre deux semi-conducteurs de type différent, y, x_1 et x_2 désignant respectivement la tension du champ électrique, la concentration de trous et la concentration d'électrons, ε étant un petit paramètre de l'ordre de la quantité $(l/L)^2$ où L est la dimension caractéristique du problème et l la dimension caractéristique du domaine spatial de la charge électrique.

Le changement de variables $w = y, u = x_1 + x_2$ et $v = x_1 - x_2$ ramène le problème (1)-(2) à une forme simplifiée:

$$(3) \quad \begin{cases} u' = vw \\ v' = uw - 2a \\ \varepsilon w' = v + b \end{cases}$$

$$(4) \quad v(0) = 0, u(1) = b \text{ et } v(1) = b.$$

Vasileva et Stelmakh obtiennent les graphes expérimentaux suivants de y, x_1 et x_2 pour $a=1$ et $\varepsilon=10^{-3}$.



V.V.Gudkov et Yu.Klokov[1] prouvent que le système (3)-(4) admet une solution unique par une méthode d'estimation a priori et affirment que, pour $a \leq 0$, le problème n'a en général pas de solution.

En fait, de l'avis de spécialistes des semi-conducteurs, le problème physique est mal posé et la formulation la plus proche de la réalité peut être la suivante:

$$(5) \quad \begin{cases} \epsilon y' = x_1 - x_2 + b \\ x_1' = x_1 y - a_1 \\ x_2' = -x_2 y + a_2 \end{cases}$$

$$(6) \quad x_1(0) = x_2(0), x_1(1) = 1/b \text{ et } x_2(1) = b,$$

ou encore, avec le changement de variables

$$w = y, u = x_1 + x_2, v = x_1 - x_2, c = a_2 - a_1 \text{ et } d = a_1 + a_2,$$

$$(7) \quad \begin{cases} u' = vw + c \\ v' = uw - d \\ \epsilon w' = v + b \end{cases}$$

$$(8) \quad v(0) = 0, u(1) = b + (1/b), v(1) = (1/b) - b.$$

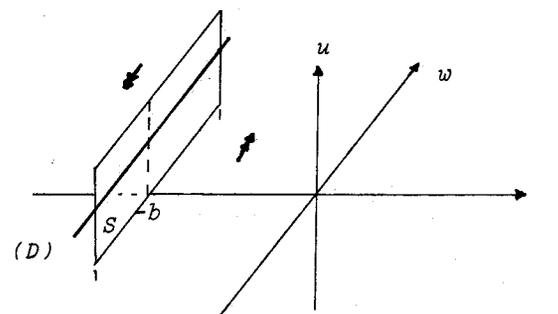
L'objet de cette étude est d'utiliser les techniques non standard pour prouver que le problème (3)-(4) ne peut avoir de solution, que les graphes obtenus par Vasileva et Stelmakh sont dûs à des défauts d'approxima-

-tion, que le problème (5)-(6) quant à lui possède une solution qu'on peut entièrement déterminer.

2. Etude du champ (3) dans l'espace de phases observable:

Prenons ϵ i.p. strictement positif et les constantes du problème standard, par transfert. Le champ (3) est lent-rapide et la surface lente est le plan

$$(S) \quad v = b.$$



Le champ rapide est quasi-parallèle à la surface lente.

Proposition 1:

Dans le demi-espace observable (u, v et w limités et $u \geq 0$), les ombres des trajectoires sont soit des droites soit des demi-droites.

En effet, appréciablement loin du plan (S), le champ est quasi-parallèle à l'axe des w et les ombres des trajectoires sont des droites parallèles à cet axe.

La loupe $v = -b + \sqrt{\epsilon} V, t = \sqrt{\epsilon} T$ permet de décrire l'allure asymptotique des trajectoires au voisinage de la surface lente (S).

Le champ (3) se transforme en:

$$\begin{cases} du/dT = \sqrt{\epsilon}(-b + \sqrt{\epsilon} V)w \\ dV/dT = uw - 2a \\ dw/dT = V \end{cases}$$

et ce champ est infiniment proche du champ standard

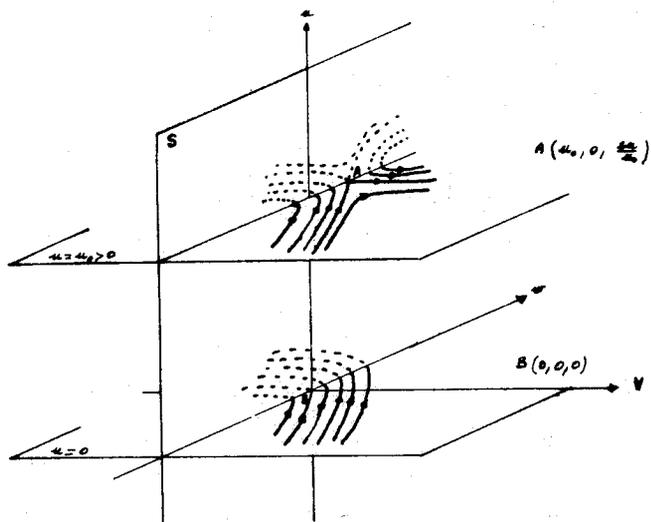
$$(9) \quad \begin{cases} du/dT=0 \\ dV/dT=uw-2a \\ dw/dT=V \end{cases}$$

pour u, V, w et T limités.

Les trajectoires du champ (9) ont pour équations

$$u=u_0 \text{ et } V^2=u_0 w^2-4aw+k.$$

Leur étude donne le résultat escompté.



Le cas u strictement négatif n'est pas à considérer dans le problème physique. Par contre, son étude entraîne des conclusions intéressantes: les trajectoires du champ (9) sont des cercles dans les plans $u=u_1 < 0$ et les trajectoires du champ (3) vont osciller d'un cercle à l'autre (et là intervient la technique de moyennisation).

Remarques:

- Il existe des trajectoires du champ (3) qui perdent du temps près de la surface (S): elles longent les séparatrices des cols.

- Le problème aux limites (3)-(4) consiste géométriquement à déterminer une trajectoire qui part du

plan (u, v) et aboutit en un temps t égal à un à la droite (D) d'équations

$$u=b \text{ et } v=-b.$$

L'espace (u, V, w) ne convient donc pas à cette étude; c'est plutôt la région (w i. g. négatif, u positif) qui pourrait nous satisfaire.

3. Espace adéquat à l'étude:

Proposition 2:

Pour tout k standard strictement positif, il existe une solution du système (3) qui vérifie les conditions suivantes:

$$v(0)=0, v(1)=-b, u(1)=\sqrt{k+b^2}.$$

Preuve:

Le changement de variables $W=\sqrt{\epsilon}w, t=\sqrt{\epsilon}T$ transforme le champ (3) en

$$(10) \quad \begin{cases} du/dT=vW \\ dv/dT=uW-2\sqrt{\epsilon}a \\ dW/dT=v+b \end{cases}$$

et ce champ est infiniment proche du champ standard

$$(11) \quad \begin{cases} du/dT=vW \\ dv/dT=uW \\ dW/dT=v+b \end{cases}$$

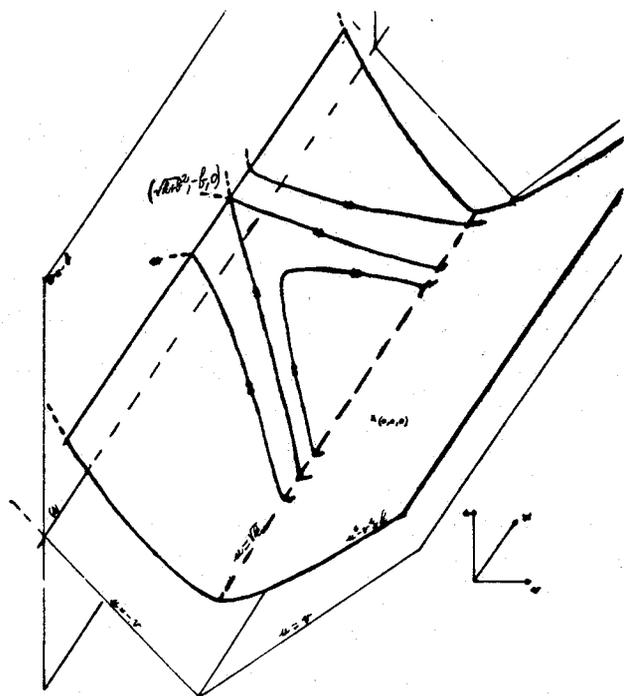
pour T limité (a étant standard).

La surface (S) et la droite (D) restent invariantes. Le champ (11) admet comme singularités tous les points de la droite ($W=0, v=-b$) et comme intégrales premières les cylindres hyperboliques d'équation

$$(H) \quad u^2-v^2=k$$

et de surfaces asymptotes les plans $u=v$ et $u=-v$ (ce dernier passe par la droite (D)).

Étudions les nappes supérieures (k standard strictement positif). La ligne des sommets est la droite ($v=0, u=\sqrt{k}$).



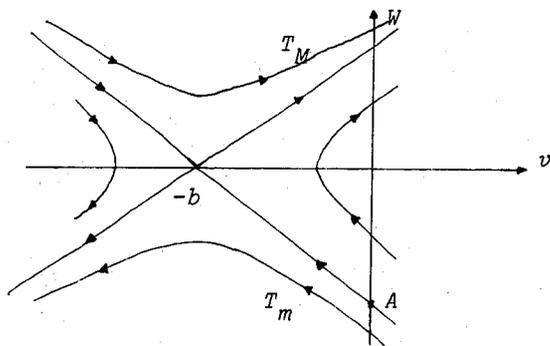
Sur la $k^{\text{ème}}$ nappe rapportée aux axes (v, W) , les trajectoires du champ (10) sont, pour v, W et T limités, infiniment proches de celles du champ standard

$$(12) \quad \begin{cases} dv/dT = \sqrt{k+v^2} W \\ dW/dT = v+b \end{cases}$$

qui ont pour équation

$$W^2/2 = \sqrt{k+v^2} + b \operatorname{Argsh}(v/\sqrt{k}) + K.$$

Le point $(-b, 0)$ est un col pour le champ (12).



A la trajectoire T_m , correspond une solution du système (12) telle que:

$$v(0)=0 \text{ et } v(1) \text{ i.g. négatif,}$$

puisque la composante en v décroît toujours.

A la trajectoire T_M , correspond une solution du système (12) telle que:

$$v(0)=0 \text{ et } v(1) \text{ i.g. positif,}$$

puisque la composante en v croît toujours.

Par permanence, il existe une solution de (3) qui vérifie

$$v(0)=0, v(1) \text{ i.g. négatif et } u^2 - v^2 \approx k$$

et une solution qui vérifie

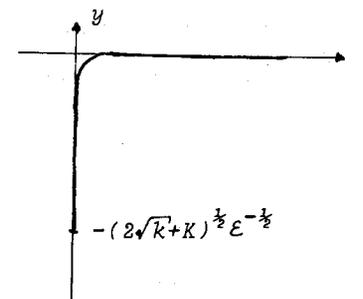
$$v(0)=0, v(1) \text{ i.g. positif et } u^2 - v^2 \approx k.$$

Par continuité, il existe une solution de (3) qui vérifie

$$v(0)=0, v(1)=-b \text{ et } u(1) = \sqrt{k+b^2}.$$

De plus, à cette solution, correspond une trajectoire T qui longe la séparatrice du col passant par le point A .

Le graphe de la fonction $y(t)$ dans ce cas est de la forme:

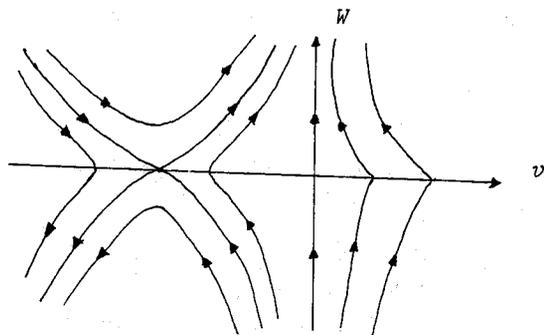


Remarques:

- Si on prend $k=0$, ce qui correspond à faire une étude des trajectoires au voisinage du plan $u=-v$, les trajectoires du champ (10) sont infiniment proches de celles, sur le plan, du champ standard:

$$(12') \quad \begin{cases} dv/dT = -vW \\ dW/dT = v+b \end{cases}$$

pour v, W et T limités.



Le champ (12') admet le point $B(-b, 0)$ comme col (c'est d'ailleurs un point de la droite (D)). Par contre, l'axe des W est une trajectoire. Il ne peut donc y avoir d'autre trajectoire partant de l'axe des W , d'où l'impossibilité de trouver une solution au problème (3)-(4).

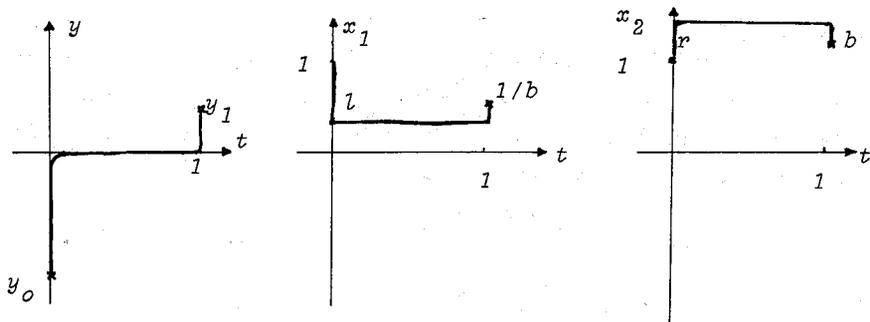
- Les graphes expérimentaux de Vasileva et Stelmakh peuvent s'expliquer par des erreurs d'approximation qui les auraient placés dans le cas de la proposition 2.

- Le résultat obtenu est indépendant de la valeur de a , malgré l'affirmation de Gudkov et Klokov.

4. Etude du problème (5)-(6):

Théorème:

Le problème (5)-(6) admet une solution et les graphes des fonctions $y(t), x_1(t)$ et $x_2(t)$ correspondantes sont les suivantes dans le cas $b > 1$:



$$l = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{4+b^2}) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}(b + \sqrt{4+b^2})$$

avec $\sqrt{\epsilon} y_0 = -\sqrt{4 - 2\sqrt{4+b^2} - 2b \operatorname{Argsh}(-b/2)}$
et

$$\sqrt{\epsilon} y_1 = [2b + (2/b) + 2b \operatorname{Argsh} [(-b+1/b)\sqrt{4+b^2}/4 + b(b+1/b)/4] - 2\sqrt{4+b^2}]^{\frac{1}{2}}$$

Preuve:

Le changement de variables $W = \sqrt{\epsilon} w, t = \sqrt{\epsilon} T$ transforme le champ (7) en

$$(7') \quad \begin{cases} du/dT = vW + c\sqrt{\epsilon} \\ dv/dT = uW - d\sqrt{\epsilon} \\ dW/dT = v + b \end{cases}$$

et ce champ est infiniment proche du champ standard

$$(11) \quad \begin{cases} du/dT = vW \\ dv/dT = uW \\ dW/dT = v + b \end{cases}$$

pour T limité (c et d étant standard).

Le champ (11) a déjà été étudié auparavant. Pour répondre au problème posé, il suffit de se placer sur la nappe d'équation $u^2 - v^2 = 4$.

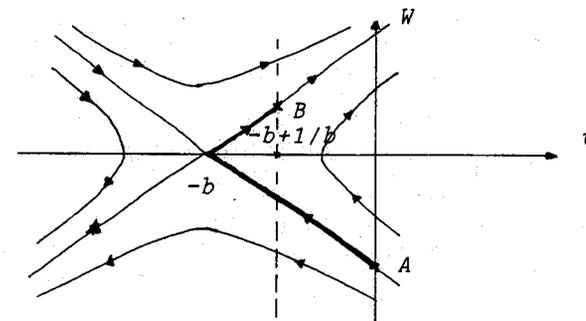
Les trajectoires du champ (7') sont alors infiniment proches de celles du champ standard

$$(12) \quad \begin{cases} dv/dT = \sqrt{4+v^2} W \\ dW/dT = v + b \end{cases}$$

sur la nappe, pourvu que T, v et w soient limités.

L'équation des trajectoires du champ (12) est la suivante:

$$W^2/2 = \sqrt{4+v^2} + b \operatorname{Argsh}(v/2) + K$$



$$A(0, -[4 - 2\sqrt{4+b^2} - 2b \operatorname{Argsh}(-b/2)]^{\frac{1}{2}})$$

$$B(-b+1/b, [2b + (2/b) + 2b \operatorname{Argsh}((-b+1/b)\sqrt{4+b^2}/4 + b(b+1/b)/4 - 2\sqrt{4+b^2}]^{\frac{1}{2}}).$$

Avec un raisonnement de continuité analogue à celui utilisé pour démontrer la proposition 2, on prouve l'existence d'une solution du système (7) qui vérifie les conditions (8). Une étude simple de la trajectoire correspondante permet d'établir les résultats du théorème.

Remarques:

- Dans le cas $b < 1$, on peut établir des résultats analogues en utilisant les mêmes procédés.

- Là-aussi, les valeurs de c et d n'influent pas sur le problème, pourvu qu'elles ne soient pas trop grandes (d'un ordre inférieur à $1/\sqrt{\epsilon}$).

- La réalité physique exige en fait de prendre b variable avec le temps. Une étude est à faire dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. V. GUDKOV - Yu. A. KLOKOV: "a two-point boundary-value problem for a third-order system", *Diff. Eq.* 18(1982)414-417.
- [2] A. B. VASILEVA - V. G. STELMAKH: "a singularly perturbed system in the theory of semi-conductor devices", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 17n° 2(1977)339-348 (en russe).