Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE TEORIE FORTEMENTE O-MINIMALI

CARLO TOFFALORI
Firenze

Nel seguito

teoria = teoria completa del 1° ordine,

ordine = ordine lineare.

<u>Osservazione</u> - La teoria RCF dei campi reali chiusi

* è "cattiva" nel senso di Shelah (instabile, quindi non classificabile),

* ha buone proprietà in teoria dei modelli (ad esempio, l'esistenza e l'unicità dell'estensione prima: la chiusura reale di un campo ordinato).

Un simile comportamento è comune a varie teorie di strutture ordinate.

<u>Definizione</u> ([D], [PS]) - 1. Una struttura ordinata M è o-minimale se ogni sottoinsieme definibile di M è combinazione booleana di semirette $v \leq a$, $a \leq v$ ($a \in M$).

2. Una teoria T di strutture ordinate è fortemente o-minimale se, per ogni modello M di T, M è o-minimale (equivalentemente, e in qualche senso sorprendentemente, se esiste un modello M di T che è o-minimale).

<u>Esempio</u> - RCF è fortemente o-minimale.

Le teorie fortemente o-minimali soddisfano buone proprietà di teoria dei modelli, ad esempio

* l'esistenza e l'unicità dell'estensione prima [PS],
* la congettura di Vaught [M].

<u>Osservazione</u> - Si ha

o-minimale : $\leqslant$ = minimale : = ,

infatti una teoria T si dice fortemente minimale se ogni modello di T è minimale, e una struttura M si dice minimale se ogni sottoinsieme definibile di M è finito o cofinito (cioè è combinazione booleana di insiemi $\{a\}$ con $a \in M$).

Si osservi che T è fortemente minimale se e solo se, per ogni modello contabile M di T,

(°) B(M) è superatomica ed ha CB-tipo (1, 1),

e che (°) individua completamente il tipo di isomorfismo di B(M).

<u>Definizione</u> - Spec T è l'insieme dei tipi di isomorfismo delle algebra di Boole B(M) quando M varia tra i modelli contabili di T; T è p-$\aleph_0$-categorica se $|\text{Spec } T| = 1$.

Dunque, se T è fortemente minimale, allora T è p-$\aleph_0$-categorica, ed un'unica algebra di Boole caratterizza tutte e sole le teorie fortemente minimali. Il problema che ci interessa è se vale qualcosa di analogo per le teorie fortemente o-minimali, ovvero se una teoria fortemente o-minimale è p-$\aleph_0$-categorica e, più in particolare, se esiste un'algebra di Boole contabile atomica B tale che, quando T è una teoria di strutture ordinate, T è fortemente o-minimale se e solo se, per ogni modello contabile M di T, B(M) $\simeq$ B.
La risposta è ovviamente no (cfr. T = Th ($\mathbb{N}$, $\leqslant$)).

<u>Problema</u> - Sia T fortemente o-minimale.

1. T p-$\aleph_0$-categorica $\Longleftrightarrow$?

2. T non p-$\aleph_0$-categorica $\Longrightarrow$ Spec T ?

<u>Lemma</u> - Se T è una teoria di strutture ordinate, esiste un modello contabile M di T tale che

(°°) B(M) è atomica e B(M)/(At B(M)) è priva di atomi.

In altre parole, ogni sottoinsieme definibile infinito di M si decompone nell'unione disgiunta di due sottoinsiemi definibili infiniti.
(°°) individua completamente il tipo di isomorfismo di B(M), nel senso che, se, per ogni i = 0, 1, B_i è un'algebra di Boole contabile atomica e $B_i/(\text{At } B_i)$ è priva di atomi, allora $B_0 \simeq B_1$.

<u>Corollario</u> - Se T è una teoria di strutture ordinate, allora T è p-$\aleph_0$-categorica se e solo se, per ogni modello contabile M di T, B(M) è atomica e B(M)/(At B(M)) è priva di atomi.

<u>Teorema</u> - Sia T una teoria fortemente o-minimale.

1. T è p-$\aleph_0$-categorica se e solo se, per ogni modello (contabile) M di T, M non contiene alcun intervallo discreto infinito;

2. se T non è p-$\aleph_0$-categorica, allora $|\mathrm{Spec}\ T| = 2^{\aleph_0}$.

Bibliografia

[D] L. van den Dries, Remarks on Tarski's problem concerning ($\mathbb{R}$, +, ·, exp), Logic Colloquium 82, North Holland, 1984

[M] L. Mayer, Vaught's conjecture for o-minimal theories, Tesi, Yale, 1985

[PS] A. Pillay - C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures I, Trans. Amer. Math. Soc.

[ST] C. Steinhorn - C. Toffalori, The Boolean spectrum of a strongly o-minimal theory, preprint