Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

TEORIA DEGLI L-SOTTOINSIEMI E RICORSIVITÀ

GIANGIACOMO GERLA
Napoli

1. INTRODUZIONE

Sia X un insieme ed L un reticolo con una operazione involutoria, non decrescente $\neg$:L→L che chiameremo *negazione* . Allora un *L-sottoinsieme* o *fuzzy sottoinsieme* e' un qualunque elemento della potenza diretta L^X cioe' una qualunque funzione s:X→L di X in L. Intuitivamente il valore s(x) rappresenta il grado di appartenenza dell'elemento x all'insieme s. Ovviamente L^X e' un reticolo, le operazioni corrispondenti a V e $\wedge$ prenderanno il nome di *unione* ed *intersezione*, quella corrispondente a $\neg$ *complementazione* . Se Y e' un altro insieme, allora una *L-funzione* f di X in Y e' un qualunque L-sottoinsieme f:XxY→L di XxY. Intuitivamente f(x,y) rappresenta il grado con cui y si puo' considerare il trasformato di x. Chiamiamo *dominio* di f il fuzzy sottoinsieme s:X → L tale che s(x)=V{f(x,y)/ y∈Y} (si veda [8], [9] e [13]).

Scopo di tale comunicazione e' quello di illustrare alcune recenti ricerche volte alla precisazione del concetto di computabilita' per L-funzioni e dei concetti di ricorsiva enumerabilita' e di decidibilita' per L-sottoinsiemi.

2. L-INSIEMI RICORSIVAMENTE ENUMERABILI E DECIDIBILI

Nel seguito supporremo, che L sia finito e che X ed Y siano insiemi codificabili. Un L-sottoinsieme s:X→L e' *ricorsivamente enumerabile* (in breve r.e.) se

$$s(x)=\lim h(x,n)$$

con $h:X\times N\to L$ funzione totale ricorsiva e non decrescente rispetto ad n [2]. Tale nozione, estende quella data da L. Arkleroad in [1], i motivi di tale estensione sono, ad esempio, che la classe degli L-sottoinsiemi r.e. secondo Arkleroad non costituiscono un reticolo. Altri motivi sono illustrati nel paragrafo 3. Diremo che $s:X\to L$ e' *decidibile* se s e' una funzione totale ricorsiva. Una L-funzione $f:X\times Y\to L$ si dice *parziale ricorsiva* se e' un L-sottoinsieme ricorsivamente enumerabile di $X\times Y$. Grazie a tali definizioni, e' possibile estendere alla teoria degli L-sottoinsiemi molti risultati della teoria della ricorsivita'. Ad esempio e' possibile provare le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 2.1. L'unione e l'intersezione di due L-sottoinsiemi ricorsivamente enumerabili e' ancora ricorsivamente enumerabile.

PROPOSIZIONE 2.2. Un L-sottoinsieme $s:X\to L$ e' decidibile se e solo se s ed il suo complemento $\neg s$ sono r.e.

PROPOSIZIONE 2.3 Un L-sottoinsieme $s:X\to L$ e' r.e. se e solo se e' il "dominio" di una L-funzione parziale ricorsiva f.

3. L-MACCHINE DI TURING, L-GRAMMATICHE E FUZZY LOGICHE.

Una prova della validita' della definizione proposte di L-sottoinsieme ricorsivamente numerabile e di quella di L-funzione parziale ricorsiva e' data dal fatto che esse si accordano perfettamente con le nozioni gia' note di linguaggio riconoscibile da una L-grammatica [9], di L-funzione computabile tramite una L-macchina di Turing [11], [12] e di L-sistema di teoremi di una logica fuzzy [10]. Valgono infatti i seguenti risultati.

PROPOSIZIONE 3.1 Un L-linguaggio e' riconoscibile da una L-grammatica se e solo se e' ricorsivamente enumerabile [7]. Una L-funzione e' computabile tramite una L-macchina di Turing se e solo se e' parziale ricorsiva [6]. Ogni L-teoria assiomatizzabile in una logica fuzzy e' ricorsivamente enumerabile ed e' decidibile se completa [2].

4. DECIDIBILITA' E PRECISIONE

Un'altra questione interessante, e' il rapporto che esiste tra "precisione" e "calcolabilita". Supponiamo che L coincida con l'intervallo [0,1] e che $\neg x=1-x$. Diremo che una L-funzione f e' *completamente indeterminata* se $\{(x,y)\in X\times Y / f(x,y)\neq 1/2\}$ e' finito, diremo che f *si puo' sfumare in una L-funzione* f', [3] se:

$$f'(x,y)>1/2 \Rightarrow f(x,y)\geq f'(x,y) \quad e \quad f'(x,y)<1/2 \Rightarrow f(x,y)\leq f'(x,y).$$

In [4] e [5] provo il seguente risultato ed altri di tipo simile.

PROPOSITION 4.1 Esiste una L-funzione f la quale non solo non e' parziale ricorsiva ma non si puo' sfumare in nessuna funzione parziale ricorsiva f' (almeno che f' non sia quasi ovunque indeterminata).

In altri termini, la Proposizione 4.1 prova che, anche se si e' disposti a perdere in precisione, non e' possibile, in generale, guadagnare in computabilita'

References

[1] L.Arkleroad, Fuzzy Recursion, Ret's and Isols, *Zeit. fur math. Logik und Grund. der Math.* **Bd. 30, S** (1984) 425-436.

[2] L.Biacino-G.Gerla, Recursively Enumerable L-Sets, in corso di stampa su *Zeit. fur math. Logik und Grund. der Math.*

[3] A. De Luca and S. Termini, A definition of non probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory, *Inform. Control* **20** (1972) 301-312.

[4] G.Gerla, Sharpness Relation and Decidable Fuzzy Sets, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-27** (1982) 113.

[5] G.Gerla, Decidability, Partial Decidability and Sharpness Relation for L-subsets, *Pubbl. Dip. Mat. Appl.* **20** (1986).

[6] G.Gerla, Turing L-machines and Recursive Computability for L-maps, *Pubbl. Dip. Mat. Appl.* **5** (1986).

[7] G.Gerla, Recursively Enumerable L-languages and L-grammars, *Pubbl. Dip. Mat. Appl.* **13** (1986).
[8] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, *J.Math.Anal.Appl.* **18** (1987) 145-171.
[9] C.V. Negoita and D.A. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Birkhauser Verlag, Basel, 1975.
[10] J. Pavelka, On Fuzzy Logic I: many valued rules of inference, Zeit. fur math. Logik und Grund. der Math. **Bd.25** (1979) 45-52.
[11] E.S. Santos, Fuzzy Algorithms, *Inform.Contr.* **17** (1970) 326-339.
[12] E.S.Santos, Fuzzy and Probabilistic Programa, *Inform. Sciences* **10** (1976)331-335.
[13] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Inform. Contr.* **12** (1965) 338-353.