Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

I MODELLI TOPOLOGICI NON SONO COMPLETI PER IL λ-CALCOLO

F. HONSELL, S. RONCHI DELLA ROCCA
Dipartimento di Informatica, Università di Torino

Un *modello topologico* del λ-calcolo e' un oggetto riflessivo nella categoria cartesiana chiusa i cui oggetti sono c.p.o. (ordini parziali completi) e i cui morfismi sono le funzioni continue secondo Scott. Un c.p.o. D e' riflessivo se $[D \to D]$ (il c.p.o. di tutte le funzioni continue da D in D) e' un retratto di D, cioe' se esistono due funzioni continue $F: D \to [D \to D]$ e $G: [D \to D] \to D$ tali che $F \circ G$ e' l'identita' in $[D \to D]$.

Ad ogni modello topologico D e' associata una *funzione di interpretazione* $[\![\ ]\!]: \Lambda \to Env \to D$, dove Λ e' l'insieme dei λ-termini e $Env = Var \to D$, dove Var e' l'insieme delle variabili. Sia $\xi \in Env$; $[\![\ ]\!]$ e' definita per induzione sui λ-termini nel modo seguente:

$[\![x]\!]_\xi = \xi(x)$

$[\![XY]\!]_\xi = ([\![X]\!]_\xi) \cdot ([\![Y]\!]_\xi)$

$[\![\lambda x.X]\!]_\xi = G(\lambda d \in D.[\![X]\!]_{\xi[x/d]})$

dove, se $d, d' \in D$, $d \cdot d' = F(d)d'$ e $\xi[x/d](y) =$ se $y = x$ allora d altrimenti $\xi(y)$.

Una λ-*teoria* e' una relazione di congruenza sui λ-termini, chiusa rispetto alla α e β-conversione. Ogni modello M del λ-calcolo induce naturalmente una λ-teoria, tramite la sua funzione di interpretazione. Piu' precisamente, se $[\![\ ]\!]$ e' la funzione di interpretazione in M, la teoria indotta da M e' $T(M) = \{X = Y \mid \forall \xi . [\![X]\!]_\xi = [\![Y]\!]_\xi\}$.

E' naturale chiedersi se la classe dei λ-modelli e' completa per il λ-calcolo, cioe' se, data una λ-teoria T, esiste sempre un λ-modello M tale che $T(M) = T$. Per quanto riguarda la classe dei modelli topologici (a cui per altro appartengono tutti i modelli noti del λ-calcolo) la risposta a tale domanda e' negativa; dimostreremo questo fatto mediante la costruzione di una λ-teoria che non puo' essere indotta da nessun

nessun modello topologico. Consideriamo la seguente λ-teoria:

$$\mathbf{T}=\{X=Y \mid \forall C[\ ].C[X]\to_\beta X'\in\Lambda_0 \Leftrightarrow C[Y]\to_\beta Y'\in\Lambda_0\}$$

dove $C[\ ]$ denota un contesto, $\to_\beta$ denota una sequenza (possibilmente vuota) di β-riduzioni, e Λ_0 denota l'insieme dei termini chiusi, cioe' senza occorrenze di variabili libere. E' facilmente controllabile che $\mathbf{T}$ e' effettivamente una λ-teoria. Siano X e Z i seguenti λ-termini:

$X=\lambda xz.\Delta\Delta(x(\Delta\Delta z)(\Delta\Delta))(x(\Delta\Delta)(\Delta\Delta z))$

$Z=\lambda xz.\Delta\Delta(x(\Delta\Delta z)(\Delta\Delta z))$

dove $\Delta=\lambda x.xx$.

Dimostreremo che $\mathbf{T}\vdash X=Z$, mentre non esiste un modello topologico D tale che $T(D)\subseteq\mathbf{T}$ e $D\models X=Z$. Per dimostrare $\mathbf{T}\vdash X=Z$, useremo alcune proprieta' del modello P, definito come segue:

Definizione. $P\sim[P\to P]$ e' il modello topologico ottenuto come limite inverso della "torre": $\langle P_n,\langle i_n,j_n\rangle\rangle$ (notazione $P=\varprojlim_{j_n} P_n$), dove $P_0=\begin{array}{c}\top_0\\ |\\ \perp_0\end{array}$, $P_{n+1}=[P_n\to P_n]$, e le funzioni $i_n:P_n\to P_{n+1}$ e $j_n:P_{n+1}\to P_n$ $(n\geq 0)$ sono cosi definite:

$i_0=\lambda x.$<u>se</u> $x=\top_0$ <u>allora</u> $\lambda z.z$ <u>altrimenti</u> $\lambda z.\perp_0$, $j_0=\lambda x.x(\perp_0)$,

$i_{n+1}=\lambda x.i_n\circ x\circ j_n$, $j_{n+1}=\lambda x.j_n\circ x\circ i_n$.

$[\![\ ]\!]^P$ e' la funzione di interpretazione di P.

Ricordiamo che l'insieme degli oggetti di P e' $\{\langle x_n\rangle \mid x_n\in P_n$ e $x_n=j_n(x_{n+1})$ $(n\geq 0)\}$, e l'ordine parziale in P e' l'ordine parziale componente per componente. Questo modello e' stato proposto da Park [2].

Definizione. L'insieme A(X) degli *approssimanti* di un termine X e' cosi definito:

$A(X)=\{A \mid X\to_\beta X'$ e A e' ottenuto da X' rimpiazzando ogni sottotermine di X' della forma $(\lambda x.P)Q$ con $\Phi(\lambda x.P)Q\}$.

Gli approssimanti sono quindi forme normali di un linguaggio Λ^* che e' un λ-calcolo esteso con l'aggiunta della costante Φ. Dato un modello $D=\varprojlim_{j_n} D_n$, la funzione di interpretazione di D si estende facilmente a termini di Λ^* ponendo $\forall\xi.[\![\Phi]\!]_\xi=([\![\lambda x.x]\!]_\xi)^1$, dove d^1 denota

la proiezione su D_1 di $d\in D$.

Teorema di Approssimazione. Sia $D=\varprojlim_{j_n} D_n$ e sia $[\![\ ]\!]$ la funzione di interpretazione in D. $[\![X]\!]_\xi=\sup\{[\![A]\!]_\xi \mid A\in A(X)\}$.

□

Utilizzando il Teorema di Approssimazione, si dimostra la seguente :

Proprieta'. $X\to_\beta X'\in\Lambda_0 \Rightarrow \forall\xi.[\![X]\!]^P_\xi\sqsupseteq[\![\Phi]\!]^P_\xi$.

□

Teorema 1. $\mathbf{T}\vdash X=Z$.

Dimostrazione. Poiche' sia X che Z appartengono a Λ_0, dimostrare che $\mathbf{T}\vdash X=Z$ equivale a dimostrare che, per ogni termine Q, $QX\to_\beta X'\in\Lambda_0$ se e solo se $QZ\to_\beta Z'\in\Lambda_0$. Ma, per la Proprieta', $QX\to_\beta X'\in\Lambda_0$ implica $[\![QX]\!]^P_\xi\sqsupseteq[\![\Phi]\!]^P_\xi$ e, di conseguenza, implica l'esistenza di $Q'\in A(Q)$ tale che $[\![Q'X]\!]^P_\xi\sqsupseteq[\![\Phi]\!]^P_\xi$, per il Teorema di Approssimazione. Quindi si possono considerare approssimanti invece di termini, e il teorema puo' essere dimostrato facilmente per induzione sulla struttura degli approssimanti, che sono forme normali.

□

Teorema 2. Sia D un modello topologico . Se $T(D)\subseteq\mathbf{T}$, allora $T(D)\subsetneq\mathbf{T}$.

Dimostrazione. Sia $[\![\ ]\!]$ la funzione di interpretazione in D. Assumiamo $T(D)=\mathbf{T}$. Questo implica:

i) $[\![\Delta\Delta]\!]\cdot[\![\Delta\Delta]\!])=[\![\Delta\Delta]\!]$.

ii) $\forall d\in D.[\![\Delta\Delta]\!]\cdot([\![\Delta\Delta]\!]\cdot d)=[\![\Delta\Delta]\!]\cdot d$.

iii) $[\![\Delta\Delta]\!]\neq[\![\lambda x.\Delta\Delta]\!]$, cioe' $[\![\Delta\Delta]\!]$ non puo' essere una funzione costante.

Sono possibili due casi:

1) $\forall a\in D.[\![\Delta\Delta]\!]\cdot a\sqsubseteq[\![\Delta\Delta]\!]$. Questo implica $[\![\Delta\Delta]\!]\sqsubseteq[\![\lambda x.\Delta\Delta]\!]$ e quindi $[\![\Delta\Delta]\!]\cdot\perp\sqsubseteq[\![\Delta\Delta]\!]$ ($\perp$ denota l'elemento minimo di D). Consideriamo la funzione:

$f(z)=$<u>se</u> $z\not\sqsubseteq[\![\Delta\Delta]\!]\cdot\perp$ <u>allora</u> $\lambda x.[\![\Delta\Delta]\!]$ <u>altrimenti</u> $[\![\Delta\Delta]\!]$.

E' facile verificare che f e' continua, e quindi $f\in D$. Si ha:

$([\![X]\!]\cdot f)\cdot\perp=[\![\Delta\Delta]\!]$, mentre $([\![Z]\!]\cdot f)\cdot\perp=[\![\Delta\Delta]\!]\cdot\perp$, contro l'ipotesi che $T(D)=\mathbf{T}$.

2) $\exists a\in D.[\![\Delta\Delta]\!]\cdot a\not\sqsubseteq[\![\Delta\Delta]\!]$. Questo implica $[\![\Delta\Delta]\!]\cdot\perp\sqsubseteq[\![\Delta\Delta]\!]\cdot a$.

Consideriamo la funzione:

f(z)=<u>se</u> z$\notin$**[ΔΔ]** <u>allora</u> **[ΔΔ]** <u>altrimenti</u> $\perp$.
f e' continua e quindi f$\in$D. Si ha:
(**[X]**·f)·a=**[ΔΔ]**·$\perp$, mentre (**[Z]**·f)·a=**[ΔΔ]**·a, contro l'ipotesi che T(D)=**T**, e quindi il teorema e' dimostrato.

□

Dai teoremi 1 e 2 otteniamo il seguente:

Corollario. I modelli topologici non sono completi per il λ-calcolo.

□

Questo risultato e' parte del contenuto dell'articolo [1].

Bibliografia

[1] Honsell F., Ronchi Della Rocca S., An Approximation Theorem for Topological Lambda models and the Topological Incompleteness of Lambda Calculus, di prossima pubblicazione su: Journal of Information and Systems Science (1986).

[2] Park D., The Y-combinator in Scott's Lambda Calculus Models, Theory of Computation Report 13, Univ. Warwick, Dept. of Comput. Sci.(1976)

[3] Scott D., Continuos lattices, "Toposes, Algebraic Geometry and Logic",Lecture Notes in Mathematics 274, Springer Verlag, pp. 97-136(1972).